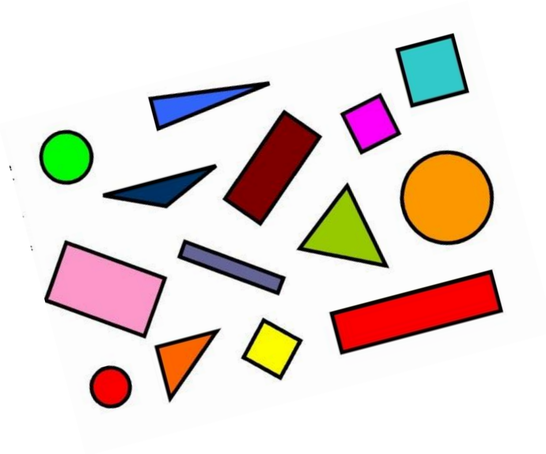
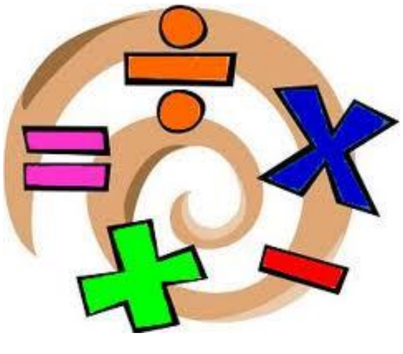


Livret de leçons

<u>Mathématiques</u>

4ème



Nom et prénom : ………………………………………………………………………………….

Classe : ………………

Professeur : …………………………………

Année scolaire 202…/202…

Les tables de multiplication

1 **1** × 1 = 1 **1** × 2 = 2 **1** × 3 = 3 **1** × 4 = 4 **1** × 5 = 5 **1** × 6 = 6 **1** × 7 = 7 **1** × 8 = 8 **1** × 9 = 9 **1** × 10 = 10	**2** **2** × 1 = 2 **2** × 2 = 4 **2** × 3 = 6 **2** × 4 = 8 **2** × 5 = 10 **2** × 6 = 12 **2** × 7 = 14 **2** × 8 = 16 **2** × 9 = 18 **2** × 10 = 20	**3** **3** × 1 = 3 **3** × 2 = 6 **3** × 3 = 9 **3** × 4 = 12 **3** × 5 = 15 **3** × 6 = 18 **3** × 7 = 21 **3** × 8 = 24 **3** × 9 = 27 **3** × 10 = 30	**4** **4** × 1 = 4 **4** × 2 = 8 **4** × 3 = 12 **4** × 4 = 16 **4** × 5 = 20 **4** × 6 = 24 **4** × 7 = 28 **4** × 8 = 32 **4** × 9 = 36 **4** × 10 = 40
5 **5** × 1 = 5 **5** × 2 = 10 **5** × 3 = 15 **5** × 4 = 20 **5** × 5 = 25 **5** × 6 = 30 **5** × 7 = 35 **5** × 8 = 40 **5** × 9 = 45 **5** × 10 = 50	**6** **6** × 1 = 6 **6** × 2 = 12 **6** × 3 = 18 **6** × 4 = 24 **6** × 5 = 30 **6** × 6 = 36 **6** × 7 = 42 **6** × 8 = 48 **6** × 9 = 54 **6** × 10 = 60	**7** **7** × 1 = 7 **7** × 2 = 14 **7** × 3 = 21 **7** × 4 = 28 **7** × 5 = 35 **7** × 6 = 42 **7** × 7 = 49 **7** × 8 = 56 **7** × 9 = 63 **7** × 10 = 70	**8** **8** × 1 = 8 **8** × 2 = 16 **8** × 3 = 24 **8** × 4 = 32 **8** × 5 = 40 **8** × 6 = 48 **8** × 7 = 56 **8** × 8 = 64 **8** × 9 = 72 **8** × 10 = 80
9 **9** × 1 = 9 **9** × 2 = 18 **9** × 3 = 27 **9** × 4 = 36 **9** × 5 = 45 **9** × 6 = 54 **9** × 7 = 63 **9** × 8 = 72 **9** × 9 = 81 **9** × 10 = 90	**10** **10** × 1 = 10 **10** × 2 = 20 **10** × 3 = 30 **10** × 4 = 40 **10** × 5 = 50 **10** × 6 = 60 **10** × 7 = 70 **10** × 8 = 80 **10** × 9 = 90 **10** × 10 = 100	**11** **11** × 1 = 11 **11** × 2 = 22 **11** × 3 = 33 **11** × 4 = 44 **11** × 5 = 55 **11** × 6 = 66 **11** × 7 = 77 **11** × 8 = 88 **11** × 9 = 99 **11** × 10 = 110 **11** × 11 = 121	**12** **12** × 1 = 12 **12** × 2 = 24 **12** × 3 = 36 **12** × 4 = 48 **12** × 5 = 60 **12** × 6 = 72 **12** × 7 = 84 **12** × 8 = 96 **12** × 9 = 108 **12** × 10 = 120 **12** × 11 = 132 **12** × 12 = 144

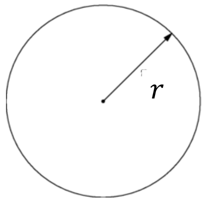
Sommaire des leçons

Formulaire : périmètres, aires et volumes

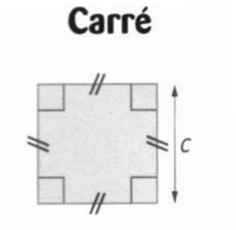
érimètre d'un disque

La seule formule de périmètre qu'il faut apprendre est celle du disque :

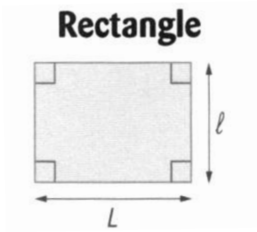
$$\mathcal{P}_{disque} = 2 \times r \times \pi \;\; ou\; 2\,\pi\, r$$



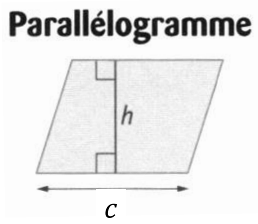
Aires des figures planes



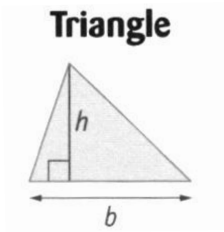
$$\mathcal{A} = c \times c = c^2$$



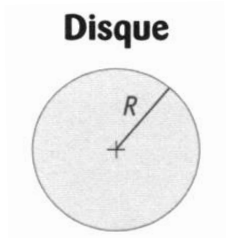
$$\mathcal{A} = L \times l$$



$$\mathcal{A} = c \times h$$

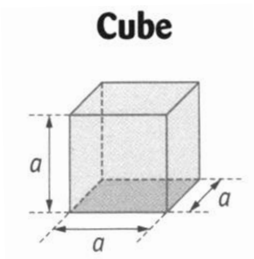


$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$$

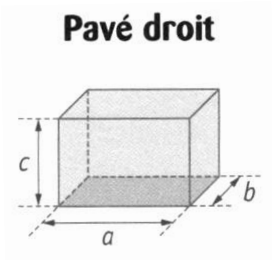


$$\mathcal{A} = \pi \times R \;x\; R = \pi R^2$$

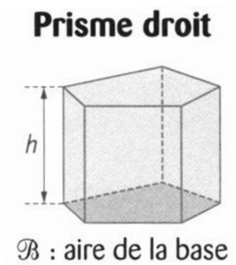
Volumes des solides



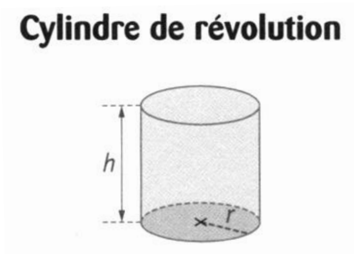
$$\mathcal{V} = a \times a \times a = a^3$$



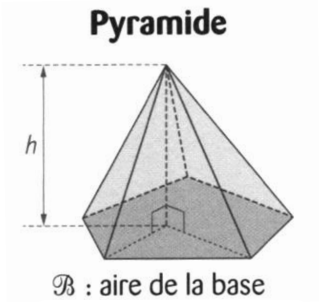
$$\mathcal{V} = a \times b \times c$$



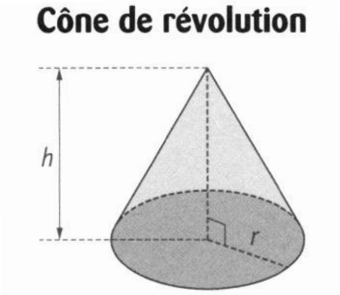
$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$$



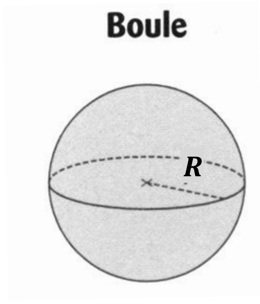
$$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h = \pi \times r^2 \times h$$



$$\mathcal{V} = \frac{\mathcal{B} \times h}{3}$$

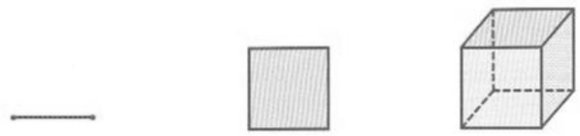


$$\mathcal{V} = \frac{B \times h}{3} = \frac{\pi \times r^2 \times h}{3}$$



$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$$

Périmètre, aire d'une figure et volume d'un solide



longueur
1 cm

aire
1 cm²

volume
1 cm³

I – Périmètre d'une figure

Le <u>périmètre</u> d'une figure est la **longueur de son contour**.

Le **périmètre d'un polygone** est donc la somme des longueurs de ses côtés.

<u>Changement d'unités de longueur :</u>

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
7	2	3	0	0	0	
		1	6	2	8	

Exemples de conversions :

723 000 cm = 723 dam

162,8 dm = 16,28 m

II – Aire d'une figure

L'<u>aire</u> d'une figure est la mesure de la surface située à l'intérieur de son contour.

L'unité d'aire de référence est **le *mètre carré*, noté *m²*.**

☞ **1 m²** est **l'aire d'un carré de 1 m de côté.**

<u>Changement d'unités d'aire :</u>

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
									1	5	8		
				9	4	2	0						
	0	0	8	7									

Exemples de conversions :

158 cm² = 1,58 dm²

94,2 dam² = 9 420 m²

8,7 hm² = 0,087 km²

III – Volume d'un solide

Le <u>volume</u> d'un solide est la mesure de **l'espace contenu à l'intérieur de ce solide**.

L'unité de volume de référence est le ***mètre cube*, noté *m³*.**

☞ **1 m³** est **le volume d'un cube de 1 m d'arête.**

Pour mesurer des volumes de liquides ou de gaz, on utilise les unités de capacité.

Une capacité de 1 L correspond à un volume de 1 dm³ : **1 L = 1 dm³**

<u>Changement d'unités de volume :</u>

km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
											kL	**hL**	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			
		1	3	0	0															
										8	6	0	0	0						
																6	2	7	1	0

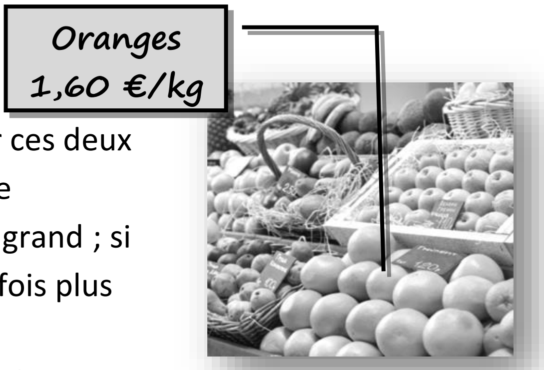
Exemples de conversions :

1,3 km³ = 1 300 hm³ 86 000 L = 86 m³ 62,71 cm³ = 62 710 mm³

Proportionnalité

I – Représentation graphique d'une situation de proportionnalité

Exemple : ***Voici ce qu'on peut lire au supermarché :***



ⓘ *Le prix à payer est* ***proportionnel à*** *la masse d'oranges* car ces deux grandeurs varient « dans les mêmes proportions » : si la masse d'oranges est deux fois plus grande, le prix sera deux fois plus grand ; si la masse d'oranges est trois fois plus grande, le prix sera trois fois plus grand, etc…

Le prix à payer se calcule en fonction de la masse d'oranges.
On va le « représenter graphiquement ».

Pour pouvoir placer des points sur le graphique, on choisit quelques valeurs (au hasard) pour la masse des oranges et on calcule leur prix. On présente cela dans un tableau :

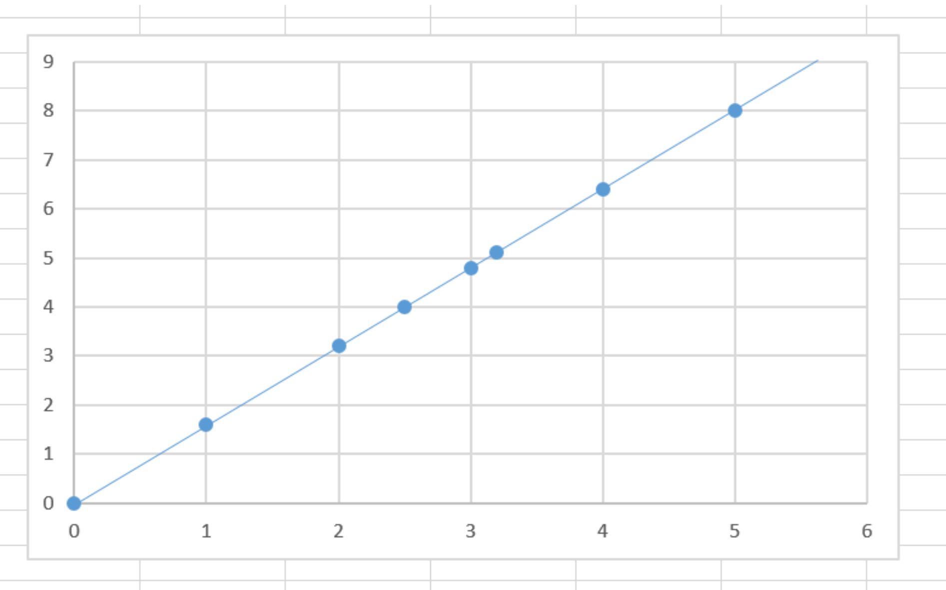
*x : on l'appelle la « **variable** » (la masse d'oranges*

Masse des oranges (en kg)	**1**	**2**	**2,5**	**3**	**3,2**	**4**	**5**
Prix à payer (en €)	*1,6*	*3,2*	*4*	*4,8*	*5,12*	*6,4*	*8*

y : se calcule en fonction de x

On va placer la masse des oranges (c'est-à-dire **les nombres de la *première ligne***) sur **l'axe des abscisses** (l'axe **horizontal**), et on place le prix à payer (c'est-à-dire les **nombres de la *deuxième* ligne**) sur **l'axe des ordonnées** (l'axe **vertical**).

Chaque **colonne de nombres** du tableau nous donne **un point à placer** dans le repère. La première colonne du tableau correspond au point **de coordonnées** (1 ; 1,6).
Les autres points à placer dans le repère sont donc les points de **coordonnées** :
(2 ; 3,2) (2,5 ; 4)
(3 ; 4,8) (3,2 ; 5,12)
(4 ; 6,4) (5 ; 8)



- Dans un repère, si on représente une situation de **proportionnalité**, alors on obtient **des points alignés avec l'origine du repère.**
- Si une situation est représentée par **des points alignés avec l'origine du repère,** alors c'est une situation de **proportionnalité.**

II – Égalité des produits en croix

Dans une situation de proportionnalité, **la « quatrième proportionnelle »** est le **quatrième nombre** calculé en connaissant trois autres nombres.

Dans le tableau de proportionnalité ci-contre, le nombre que l'on cherche est $\boldsymbol{n}$:
on le calcule à l'aide des nombres *a, b et c.*

☞ Les **produits en croix** $\boldsymbol{a \times n}$ **et** $\boldsymbol{b \times c}$ **sont égaux**.

Pour trouver n, on effectue le calcul : $\boldsymbol{n = \dfrac{b \times c}{a}}$

a	***c***
b	$\boldsymbol{n}$

?

Preuve : *On a montré pourquoi les produits en croix sont égaux sur la fiche d'exercices.*

Exemples : *À l'aide de l'égalité des produits en croix, complète par le nombre manquant dans chaque tableau de proportionnalité :*

tableau 1

4	11
9	**24,75**

Écris le calcul et son résultat :
$\boldsymbol{\dfrac{9 \times 11}{4}}$

tableau 2

147	42
59,5	17

Écris le calcul et son résultat :
$\boldsymbol{\dfrac{59{,}5 \times 42}{17}}$

tableau 3

$\boldsymbol{\dfrac{40}{7}}$	8
5	7

Écris le calcul et son résultat :
$\boldsymbol{\dfrac{5 \times 8}{7}}$

Lorsque le résultat est un nombre à virgule qui ne se termine pas, on le laisse en fraction !

Exemple d'utilisation :

On veut télécharger sur Internet un fichier de 121,7 Mo.
Au bout de 50 secondes, 48,2 Mo ont été téléchargés.
Quelle est la durée probable du téléchargement de ce fichier ?

On suppose que la durée de téléchargement est proportionnelle à la taille du fichier (c'est vrai en général : si un fichier est deux fois plus lourd qu'un autre, le temps de téléchargement est deux fois plus long…).

Taille du fichier (en Mo)	*48,2*	*121,7*
Temps (s)	*50*	***126***

On calcule et on arrondit le résultat à la seconde : $\boldsymbol{\dfrac{50 \times 121{,}7}{48{,}2}}$

Puis on convertit le nombre de secondes trouvées en « minutes et secondes » :
2 min et 6 s
Donc, on peut dire que le téléchargement du fichier va durer environ 2 min

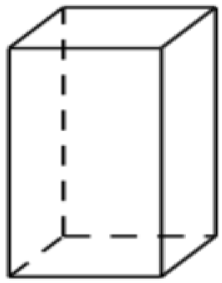
III – Agrandissement et réduction

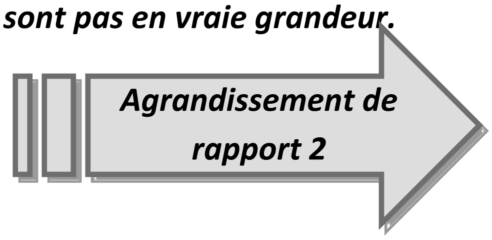
Définitions : • On dit qu'un objet est **un agrandissement ou une réduction** d'un autre objet lorsque **toutes leurs longueurs sont proportionnelles**.

• Dans un agrandissement ou une réduction de **rapport $\boldsymbol{k}$** ($k \neq 0$), **on multiplie toutes les dimensions** d'une figure **par le nombre $\boldsymbol{k}$**.

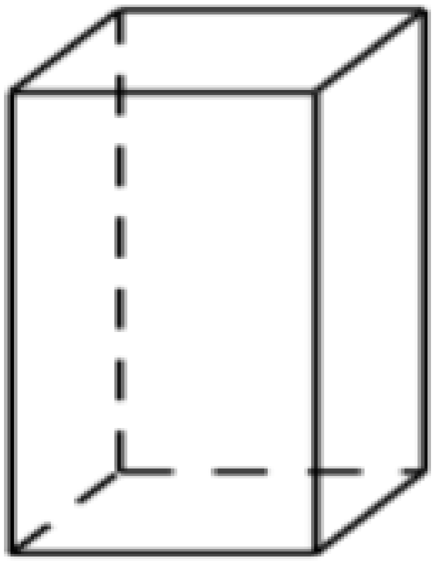
• Si $\boldsymbol{k} > 1$, alors c'est un **agrandissement**. Si $\boldsymbol{k} < 1$, alors c'est une **réduction**.

***Exemple 1 :** Les figures ne sont pas en vraie grandeur.*





On multiplie les dimensions du petit pavé droit par 2 pour obtenir les dimensions du grand pavé droit.



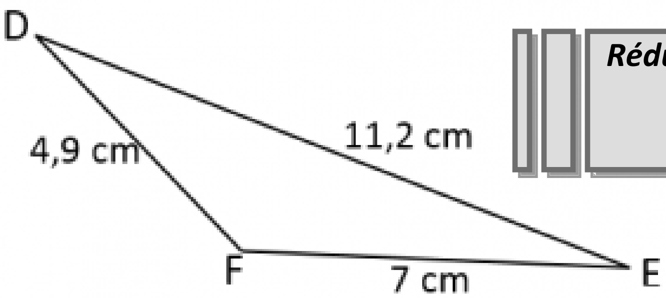
Dimensions du petit pavé droit :
Hauteur : 3 cm
Largeur : 2 cm
Profondeur : 1,5 cm

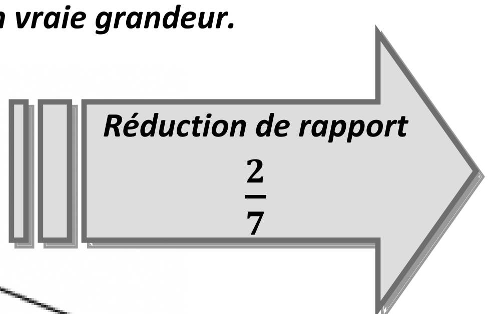
Dimensions du grand pavé droit :
Hauteur : 6 cm
Largeur : 4 cm
Profondeur : 3 cm

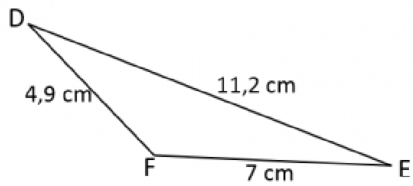
Dimensions du petit pavé droit (en cm)	3	2	1,5
Dimensions du grand pavé droit (en cm)	**6**	**4**	**3**

$\times$ **2**$\times$

***Exemple 2 :** Les figures ne sont pas en vraie grandeur.*







Dimensions du grand triangle (en cm)	11,2	4,9	7
Dimensions du petit triangle (en cm)	**3,2**	**1,4**	**2**

$\times \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}}$

IV – Vitesse moyenne

Exemple : *En supposant qu'un véhicule roule à une vitesse constante de 76 km/h, remplir le tableau suivant :*

0,5 h c'est *30 min*　　***4,25 h c'est*** *4 h 15 min*

temps (en h)	0,5	1	3	4,25	6
distance parcourue (en km)	38	76	228	323	456

Lorsqu'un véhicule roule à vitesse constante, la **distance parcourue** est **proportionnelle au temps du trajet**.

La **vitesse moyenne** v **d'un mobile** qui parcourt **une distance** d **en un temps** t se calcule avec **la formule :** $v = \frac{d}{t}$

Exemple 1 :
Un véhicule roule pendant 2 h 30 et parcourt 210 km.
Quelle est sa vitesse moyenne en **km/h** *?*
On connaît d = 210 km
et t = 2 h 30 min = 2,5 h.
donc $v = \frac{210}{2,5} = 84$
La vitesse moyenne du véhicule est 84 km/h.

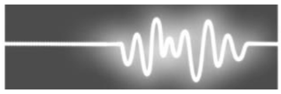
Exemple 2 :

Un coureur parcourt 5,6 km en 42 min.
Quelle est sa vitesse moyenne en **m/s** *?*
On connaît d = 5,6 km = 5600 m
et t = 42 min = 2520 s
donc $v = \frac{5600}{2520} \approx 2,22$
La vitesse moyenne du coureur est 2,22 m/s.

Unités de vitesse : • Si la distance est en kilomètres et le temps en heures, alors la vitesse est en **kilomètre par heure**, noté **km/h** ou **km.h^{-1}**.
• Si la distance est en mètres et le temps en secondes, alors la vitesse est en **mètre par seconde**, noté **m/s** ou **m.s^{-1}**.

• Pour calculer **la distance parcourue *d*** par un mobile se déplaçant à une **vitesse moyenne *v*** pendant un **temps *t***, on peut utiliser la formule : $d = t \times v$

Exemple 3 : *Le son se déplace dans l'air à une vitesse moyenne d'environ 340 m/s. Quelle distance parcourt-il en 4 secondes ?*



d = 4 x 340 = 1360 m.

• Pour calculer **le temps de parcours *t*** d'un mobile se déplaçant à une **vitesse moyenne *v*** sur une **distance *d***, on peut utiliser la formule : $t = \frac{d}{v}$

Exemple 4 : *La lumière se déplace dans l'air à une vitesse moyenne d'environ 300 000 km/s. En combien de temps parcourt-elle un million de kilomètres ?*

t = 1 000 000 ÷ 300 000 ≈ 3,33 s.

V – Utilisation et calcul d'un pourcentage

Pierre est berger et garde un troupeau de 170 animaux. Dans son troupeau, 60% de ses animaux sont des moutons.
Louis, un autre berger, surveille un troupeau de 230 animaux dont 10 % sont des moutons.

a) Combien de moutons Pierre garde-t-il ?

$\frac{60}{100} \times 170$ = 102

Phrase : Pierre garde 102 moutons.

b) Combien de moutons Louis garde-t-il ?

$\frac{10}{100} \times 230$ = 23

Phrase : Louis garde 23 moutons.

Lors de la transhumance, Pierre et Louis ont réuni leurs troupeaux pour se déplacer ensemble.

c) Quel est le nombre de moutons du nouveau troupeau ainsi formé ?

Calcul : 102 + 23 = 125

Phrase : Il y a dons 125 moutons dans ce nouveau troupeau.

d) Quel est alors le pourcentage de moutons dans ce nouveau troupeau ?

Nombre de moutons	***125***	?
Nombre total d'animaux	***400***	100

Calcul : 125 x 100 ÷ 400 = 31,25

Phrase : dan ce nouveau troupeau, il y a 31,25 % de moutons.

ⓘ ***Le pourcentage trouvé n'est pas égal à la moyenne des deux pourcentages de départ car les deux troupeaux n'avaient pas le même nombre d'animaux au départ.***

V – Pourcentage d'augmentation ou de réduction

Un lave-linge coûte 360 €.

Son prix est augmenté de 15% en décembre.

a) Combien coûte-t-il après cette hausse ?

Calcul : 15 x 360 ÷ 100 = 54

Phrase : le prix augmente de 54 euros.

Calcul : 360 + 54 = 414

Phrase : le prix final après ma hausse est de 414 euros.

Puis en janvier, il est soldé avec –15% de réduction.

b) Quel est son prix pendant les soldes ?

Calcul : 15 x 414 ÷ 100 = 62,10

Phrase : le prix baisse de 62,10 euros.

Calcul : 414 – 62,10 = 351,90

Phrase : le prix après les soldes est de 351,90 euros.

ⓘ ***Le prix obtenu n'est pas égal au prix de départ car les 15% ne sont pas calculés sur le même prix lors de la hausse et lors de la baisse.***

Leçon 2

Nombres relatifs

$(+4)-(+7)=$ on ajoute l'opposé $(+4)+(-7)=(-3)$

I – Produit de nombres relatifs

1) Produit de deux nombres relatifs

Règle de calcul : Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie les deux distances à zéro et on applique **la « règle des signes »** :

- Si les deux nombres sont de **même signe**, le résultat est **positif.**
- Si les deux nombres sont de **signes contraires**, le résultat est **négatif**.

Exemples :

$(-6)\times(-7)=42$
Les deux nombres sont de même signe donc le résultat est **positif**.

$4\times(-5)=-20$
Les deux nombres sont de signes contraires donc le résultat est **négatif.**

Cas particulier :

Le produit d'un nombre par lui-même est appelé **le carré** de ce nombre.

Exemples : 5×5 est le carré de 5.
On le note 5^2 ***:*** cette écriture se lit ***« 5 au carré ».*** $5^2=25$
$(-7)\times(-7)$ est le carré de -7. On le note $(-7)^2$ ***.*** $(-7)^2=49$

2) Produit de plusieurs nombres relatifs

Règle de calcul : Pour multiplier plusieurs nombres relatifs, on multiplie d'abord toutes les distances à zéro ensemble, puis on détermine le signe du résultat en comptant **le nombre de facteurs négatifs** :

- Si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, alors le résultat est **positif**.
- Si le nombre de facteurs négatifs est **impair**, alors le résultat est **négatif**.

Exemples :

$-2\times 4\times(-5)=40$
Il y a 2 facteurs négatifs : $-2\ et\ -5$
2 est un nombre pair, donc le résultat est positif.

$-3\times(-2)\times(-8)=-48$
Il y a 3 facteurs négatifs : $-3\,;-2\ et -8$
3 est un nombre impair, donc le résultat est négatif.

II - Quotient de deux nombres relatifs

Règle de calcul : Pour diviser deux nombres relatifs, on divise d'abord les distances à zéro, puis on détermine le signe du résultat en utilisant **la même « règle des signes »** que pour un produit.

Exemples :

$(-45)\div(-5)=9$
Les deux nombres sont de même signe donc le résultat est **positif.**

$(-32)\div 4=-8$
Les deux nombres sont de signes contraires donc le résultat est **négatif**.

Leçon 3

Calcul littéral

Un **calcul littéral** (appelé aussi **expression littérale**) est un calcul qui utilise des lettres.

I – Simplifier une expression littérale

Dans une expression littérale, le signe « × » peut être **supprimé devant une lettre ou une parenthèse.**

Exemples :

- $13 \times a$ peut s'écrire $13a$
  $a \times 13$ peut aussi s'écrire $13a$
- $a \times b$ peut s'écrire ab
- $8 \times (y+3)$ peut s'écrire $8(y+3)$
- $5x$ est l'écriture simplifiée de $5 \times x$
- $(4+y)(1+9y)$ est l'écriture simplifiée de $(4+y) \times (1+9 \times y)$

ATTENTION ! 5×7 ne peut pas s'écrire 57 !

Utilisation : ***On se sert de cette règle pour simplifier l'écriture de multiplications.***

L'écriture $7x \times 4$ peut s'écrire $7 \times x \times 4 = 7 \times 4 \times x = 28x$

De la même manière, on peut simplifier :

$a \times a = a^2$ $\quad -3b \times b = -3b^2$ $\quad 5 \times 6x = 30x$ $\quad -12y \times 3 = -36y$

$8x \times 4x = 32x^2$ $\quad 11a \times (-6a) = -66a^2$ $\quad (-7) \times (-5x) = 35x$

Multiplier deux expressions littérales **est toujours possible !**

II – Réduire une expression littérale

Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec **le moins de termes possible**.

Exemples :

x signifie $1x$

$n+n+n+n+n+n = 6 \times n = 6n$

ⓘ Ne pas confondre ce calcul avec $n \times n \times n \times n \times n \times n$ qui est égal à n^6 !
(on le reverra plus tard)

$a+a+b+a+b = 3 \times a + 2 \times b = 3a+2b$

On n'a pas le droit d'ajouter « des a » avec « des b » !

$7x + 2x = 9x$ **par contre** $7x + 2$ et $7x^2 + 2x$ sont impossibles à réduire !

On n'a pas le droit d'ajouter « des x » avec des nombres « seuls » !
On n'a pas le droit d'ajouter « des x^2 » avec « des x » !

$$9x^2 + x - 6 - 4x + 2x^2 + 11 = \underbrace{9x^2 + 2x^2}_{\text{On regroupe les termes en } x^2} \underbrace{+\, x - 4x}_{\text{On regroupe les termes en } x} \underbrace{-\, 6 + 11}_{\text{On regroupe les nombres seuls}} = 11x^2 - 3x + 5$$

III – Développer une expression littérale

<u>Développer</u> une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence) en utilisant les formules de **<u>distributivité</u>** suivantes :

Soient *k, a et b* trois nombres relatifs :

$\boldsymbol{k \times (a + b) = k \times a + k \times b}$ $\qquad$ $\boldsymbol{k \times (a - b) = k \times a - k \times b}$

On dit que l'on « **distribue » le nombre $\boldsymbol{k}$** à la parenthèse.

<u>Exemples</u> :   Développer et réduire les expressions suivantes :

$A = x\,(7x + 4)$

$A = x \times 7x + x \times 4$

$\boldsymbol{A = 7x^2 + 4x}$ **On a « distribué $\boldsymbol{x}$ »**

$C = 8a\,(10a - 6)$

$C = 8a \times 10a - 8a \times 6$

$\boldsymbol{C = 80a^2 - 48a}$ **On a « distribué $\boldsymbol{8a}$ »**

$B = -5\,(3y + 2)$

$B = -5 \times 3y + (-5) \times 2$

$\boldsymbol{B = -15y - 10}$ **On a « distribué – $\boldsymbol{5}$ »**

$D = -9\,(-y - 5)$

$D = -9 \times (-y) - 9 \times (-5)$

$\boldsymbol{D = 9y + 45}$ **On a « distribué – $\boldsymbol{9}$ »**

IV – Factoriser une expression littérale

<u>Factoriser</u> une expression littérale, c'est transformer une somme (ou une différence) en un produit de facteurs en utilisant une des deux formules suivantes :

$$\boldsymbol{k \times a + k \times b = k \times (a + b)}$$
$$\boldsymbol{k \times a - k \times b = k \times (a - b)}$$

$\boldsymbol{k}$ s'appelle **le <u>facteur commun</u>** aux deux termes de l'expression de départ.

<u>Exemples</u> : Factoriser les expressions suivantes :

- *Le facteur commun est <u>un nombre</u> :*

$E = 14\,a - 21$

$E = \mathbf{7} \times 2a - \mathbf{7} \times 3$

*On reconnaît **7** comme facteur commun*

$E = \mathbf{7} \times (2a - 3)$

$\boldsymbol{E = 7(2a - 3)}$ ***On a « factorisé par 7 ».***

- *Le facteur commun est <u>une lettre</u> :*

$F = -\,x^2 + 6x$

$F = \boldsymbol{x} \times (-x) + \boldsymbol{x} \times 6$

On reconnaît $\boldsymbol{x}$ comme facteur commun

$F = \boldsymbol{x} \times (-x + 6)$

$\boldsymbol{F = x\,(-x + 6)}$ ***On a « factorisé par $\boldsymbol{x}$. »***

☞ ***Les étapes ne sont pas obligatoires, on peut directement écrire la dernière ligne !***

- *Le facteur commun est <u>un nombre</u> **et** <u>une lettre</u> :*

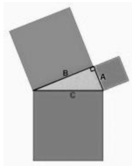
$G = 32y^2 - 28y$ *On reconnaît $\boldsymbol{4}$ **et** $\boldsymbol{y}$ comme facteurs communs : on factorise par $\boldsymbol{4y}$*

$G = \boldsymbol{4y} \times 8y - \boldsymbol{4}y \times 7$

$G = \boldsymbol{4y} \times (8y - 7)$

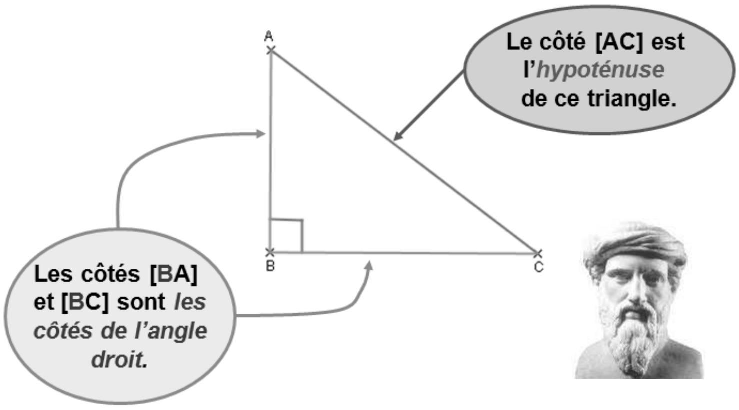
$\boldsymbol{G = 4y\,(8y - 7)}$ ***On a « factorisé par $\boldsymbol{4y}$ »***

Pythagore



Rappel de vocabulaire :

Dans un triangle rectangle, le côté opposé au sommet de l'angle droit s'appelle **l'hypoténuse**.
C'est aussi le plus grand côté du triangle.
Les deux autres côtés s'appellent les **côtés de l'angle droit.**



I - Théorème de Pythagore

Si un triangle est **rectangle,** alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.**

Preuve : ***c***e théorème est admis, mais on pourrait en faire une démonstration (qui expliquerait pourquoi ce théorème est vrai).

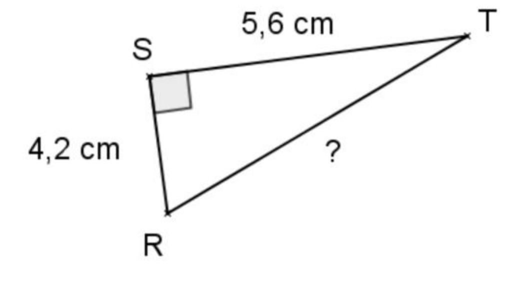
Utilisation : Le théorème de Pythagore sert **à calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle quand on connaît la longueur des deux autres côtés**.

• *1ère application du théorème :* ***Calculer la longueur de l'hypoténuse.***
Soit RST un triangle rectangle en S tel que RS = 4,2 cm et ST = 5,6 cm. Calculer RT.

On sait que le triangle RST est rectangle en S.
On utilise le théorème de Pythagore :

[RT] est l'hypoténuse

$$RT^2 = RS^2 + ST^2$$
$$RT^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2$$
$$RT^2 = 49$$
$$RT = \sqrt{49}$$
$$RT = 7\ cm$$



Donc le segment [RT] mesure 7 cm.

Remarque : pour calculer la longueur RT, on utilise la touche « **racine carrée** » de la calculatrice

Exemple : $\sqrt{49}$ est le nombre qui, au carré, fait 49.
$\sqrt{49}$ se lit « racine carrée de » 49. $\sqrt{49} = 7 \ car\ 7^2 = 7 \times 7 = 49.$

On connaît déjà par cœur certaines racines carrées, celles des « **carrés parfaits** » jusqu'à 144 :

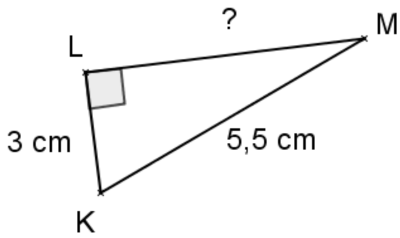
$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$

Les racines carrées des autres nombres positifs se calculent avec la calculatrice mais on peut en donner **un encadrement** : par exemple, $\sqrt{7}$ sera située entre $\sqrt{4}$ et $\sqrt{9}$ car 7 est situé entre 4 et 9. Donc on peut écrire $2 < \sqrt{7} < 3$ (car $2 = \sqrt{4}$ et $3 = \sqrt{9}$)

• *2ème application du théorème :*

<u>Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit.</u>

Soit KLM un triangle rectangle en L tel que KL = 3 cm et KM = 5,5 cm. Calculer LM.



On sait que le triangle KLM est rectangle en L.

On utilise le théorème de Pythagore :

[KM] est l'hypoténuse

$$KM^2 = KL^2 + LM^2$$
$$5{,}5^2 = 3^2 + LM^2$$
$$LM^2 = 5{,}5^2 - 3^2$$
$$LM^2 = 21{,}25$$
$$LM = \sqrt{21{,}25}$$
$$LM \approx 4{,}6\ cm$$

*Pour calculer la longueur d'un **<u>côté de l'angle droit</u>**, il faut faire **une <u>soustraction</u>** !*

***Donc le segment [LM] mesure environ 4,6 cm*.**

<u>Remarque :</u> Il existe une conséquence du théorème de Pythagore (appelée **la contraposée** du théorème de Pythagore) : elle permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

<u>II – Réciproque du théorème de Pythagore</u>

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

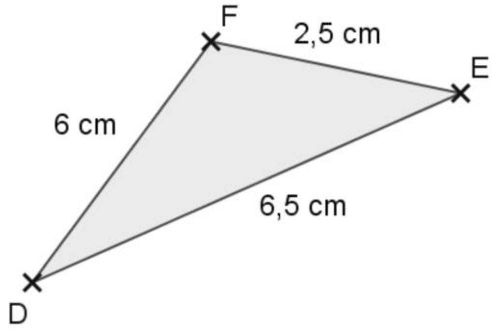
<u>Utilisation</u> : La réciproque du théorème de Pythagore sert **à démontrer qu'un triangle est rectangle.**

<u>Preuve</u> : Cette réciproque est admise, mais on pourrait en faire une démonstration (qui expliquerait pourquoi cette réciproque est vraie).

<u>Exemple d'application de la réciproque :</u>

Soit un triangle DEF tel que DE = 6,5 cm ; DF = 6 cm et EF = 2,5 cm.

Démontrer que le triangle DEF est rectangle.



Dans le triangle DEF, [DE] *est le plus grand côté.*

On calcule <u>séparément</u> DE^2 *et* $DF^2 + FE^2$:

$DE^2 = 6{,}5^2$	$DF^2 + FE^2 = 6^2 + 2{,}5^2$
$= \mathbf{42{,}25}$	$= \mathbf{42{,}25}$

On constate que $DE^2 = DF^2 + FE^2$.

***D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le <u>triangle</u>* <u>DEF est rectangle en F</u>.**

Leçon 5

Arithmétique

On ne travaille ici qu'avec des ***nombres entiers positifs***
(appelés nombres entiers « naturels »).

I – Divisibilité : vocabulaire et définitions

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Définition :

Effectuer **la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$**,
c'est trouver deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$\boldsymbol{a = q \times b + r} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{r < b}$$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline \boldsymbol{r} & \boldsymbol{q} \end{array}$$

Le nombre $\boldsymbol{q}$ s'appelle **le quotient** et le nombre $\boldsymbol{r}$ s'appelle **le reste**
de cette division euclidienne.

Exemple : La division euclidienne de 65 par 9 donne 7 comme quotient et 2 comme reste
car : $65 = 7 \times 9 + 2$ et $2 < 9$

Définition :

Lorsque la division euclidienne de *a* par *b* a **un reste nul**, on dit que :

- *a* est **un multiple** de *b* *ou que* *a* est **divisible par** b
- *b* est **un diviseur** de *a* *ou que* *b* **divise** *a*

ⓘ Cela signifie qu'il existe un nombre entier positif k tel que $\boldsymbol{a = b \times k}$.

Exemples :

- La division euclidienne de 40 par 8 donne 5 comme quotient et 0 comme reste car :

$$40 = 5 \times 8$$

On dit que : 40 est un multiple de 8, ou encore que : 40 est divisible par 8
ou encore que : 8 divise 40 ou encore que : 8 est un diviseur de 40.

- Le nombre 12 a plusieurs diviseurs : 1 ; 2 ; **3 ; 4** ; 6 ; 12

- Les diviseurs vont « deux par deux » : 1 et 12 2 et 6 3 et 4
- Mieux vaut les ranger dans l'ordre croissant pour ne pas en oublier !
- Le nombre 1 est un diviseur de tout nombre entier.

- Le nombre 64 a plusieurs diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; **8** ; 16 ; 32 ; 64

On est au milieu de la liste des diviseurs lorsqu'on atteint la racine carrée du nombre !
Ici $\sqrt{64} = 8$ et dans l'exemple précédent $\sqrt{12} = 3{,}464 \ldots$ (entre 3 et 4)

- Le nombre 17 a seulement deux diviseurs : 1 et 17.

Définition :

Un nombre entier positif qui admet **exactement deux diviseurs** (1 et lui-même) s'appelle un **nombre premier.**

Remarques :

Le nombre 1 admet un seul diviseur (lui-même), ce n'est donc pas un nombre premier !
Le **plus petit nombre premier est le nombre 2**.
Voici le début de la liste des nombres premiers dans l'ordre croissant :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 etc …

Définition :

Un **diviseur commun** à deux nombres *a* et *b* est un nombre entier **qui divise à la fois *a* et *b***.

Exemple : Pour connaître les diviseurs communs à 84 et à 30, on écrit la liste des diviseurs de 84 et la liste des diviseurs de 30, et on regarde quels sont les diviseurs communs aux deux listes :

Les diviseurs de 84 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84.
Les diviseurs de 30 sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.

Les **diviseurs communs** à 84 et à 30 sont donc 1 ; 2 ; 3 ; 6 : ils apparaissent dans les deux listes.
Le plus grand diviseur commun est 6.

☞ *Rappels : critères de divisibilité*

Il existe des méthodes simples et rapides pour reconnaître facilement si un nombre est divisible par 2 ; par 3 ; par 4 ; par 5 ; par 9 ou par 10.

- Un nombre **divisible par 2** est un **nombre pair** : il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8. 
- Un nombre **divisible par 5** se termine **par 0 ou par 5.**
- Un nombre **divisible par 10** se termine **par 0**.

- Un nombre **divisible par 3** a la **somme de ses chiffres divisible par 3.**
- Un nombre **divisible par 9** a la **somme de ses chiffres divisible par 9.**

Exemples :

- Le nombre 5 172 est divisible par 3 mais pas par 9 car $5 + 1 + 7 + 2 = 15$ et 15 est divisible par 3 mais pas par 9.
- Le nombre 12 978 est divisible par 3 et par 9 car $1 + 2 + 9 + 7 + 8 = 27$ et 27 est divisible par 3 et par 9.

- Un nombre **divisible par 4** a **ses deux derniers chiffres** qui forment un nombre **divisible par 4**.

Exemples :

- Le nombre 736 est divisible par 4 car 36 est un multiple de 4.
- Le nombre 3 154 n'est pas divisible par 4 car 54 n'est pas un multiple de 4.

Leçon 6

Écritures fractionnaires

I – Rappels sur les écritures fractionnaires

1) Vocabulaire

Soient a et b deux nombres relatifs avec $b \neq 0$.

Le **quotient de a par b** s'écrit sous forme fractionnaire $\frac{a}{b}$.

Dans l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$, a s'appelle **le <u>numérateur</u>**

et b s'appelle **le <u>dénominateur</u>.**

Lorsque a et b sont des **nombres entiers**, l'écriture fractionnaire $\frac{a}{b}$ s'appelle **<u>une fraction</u>**.

2) Quotients égaux

Le quotient de deux nombres <u>ne change pas</u> **si on multiplie ou on divise** ces deux nombres **<u>par un même nombre</u>** non nul.

<u>Exemple 1 :</u> $\frac{-4}{7} = \frac{-12}{21}$ car on a multiplié le numérateur et le dénominateur par 3.

<u>Exemple 2 :</u> $\frac{-49}{-56} = \frac{7}{8}$ car on a divisé le numérateur et le dénominateur par -7.

3) Comparaison de quotients

Pour <u>comparer</u> deux nombres en écriture fractionnaire, on les écrit **sur le <u>même dénominateur</u>** puis **on les range dans l'ordre des numérateurs**.

<u>Exemple :</u> Si on veut comparer les fractions $\frac{-3}{4}$ et $\frac{-5}{9}$, on les met d'abord sur le même dénominateur.

Pour cela, on va choisir un nombre qui est à la fois dans la table de 4 et de 9 : on choisit 36.

On transforme les deux fractions : $\frac{-3}{4} = \frac{-27}{36}$ et $\frac{-5}{9} = \frac{-20}{36}$ et on compare ensuite les numérateurs des deux fractions obtenues : $-27 < -20$ et donc $\frac{-27}{36} < \frac{-20}{36}$

Et on conclut que $\frac{-3}{4} < \frac{-5}{9}$.

4) Additions et soustractions de quotients

Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire :

→ on les écrit d'abord **<u>avec le même dénominateur</u>**

→ puis on **ajoute ou on soustrait** les numérateurs et on garde le **dénominateur commun**.

Exemples : *calculer en écrivant les étapes :*

rappel : $7 = \frac{7}{1}$

$A = \frac{-14}{5} - \frac{9}{10}$	$B = \frac{11}{6} - \frac{3}{4}$	$C = 7 + \frac{5}{8}$	$D = \frac{7}{2} - \frac{-1}{6} + \frac{5}{9}$
$A = \frac{-28}{10} - \frac{9}{10}$	$B = \frac{44}{24} - \frac{18}{24}$	$C = \frac{7}{1} + \frac{5}{8}$	$D = \frac{63}{18} - \frac{-3}{18} + \frac{10}{18}$
$A = \frac{-37}{10}$	$B = \frac{26}{24}$	$C = \frac{56}{8} + \frac{5}{8} = \frac{61}{8}$	$D = \frac{76}{18}$

5) Multiplications de quotients

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire, on **multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.**

Exemples : *Calculer et simplifier les résultats lorsque c'est possible :*

On décompose les nombres 45, 24 et 20

$E = \frac{-11}{8} \times \frac{-3}{10}$	$F = \frac{9}{2} \times \frac{5}{9}$	$G = -6 \times \frac{4}{7}$	$H = \frac{45}{8} \times \frac{24}{-20}$
$E = \frac{-11 \times -3}{8 \times 10} = \frac{33}{80}$	$F = \frac{9 \times 5}{2 \times 9} = \frac{5}{2}$	$G = \frac{-6 \times 4}{1 \times 7} = \frac{-24}{7}$	$H = \frac{9 \times 5 \times 8 \times 3}{8 \times -4 \times 5} = \frac{27}{-4}$

II - Divisions de deux nombres en écriture fractionnaire

1) Inverse d'un nombre

Deux nombres sont **inverses si leur produit est égal à 1.**

Soit $\boldsymbol{x}$ un nombre non nul. **L'inverse de $\boldsymbol{x}$ est $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$** (noté aussi x^{-1}).

Soient a et b deux nombres relatifs avec $a \neq 0$ *et* $b \neq 0$. **L'inverse de $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ est $\boldsymbol{\frac{b}{a}}$.**

Exemples : ◆ L'inverse de 2 est $\frac{1}{2}$ car $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$

◆ L'inverse de 15 est $\frac{1}{15}$ car $15 \times \frac{1}{15} = \frac{15}{15} = 1$

◆ L'inverse de $\frac{5}{9}$ est $\frac{9}{5}$ car $\frac{5}{9} \times \frac{9}{5} = \frac{45}{45} = 1$

ⓘ **0 est le seul nombre qui n'a pas d'inverse** car $\frac{1}{0}$ n'existe pas !

2) Divisions de nombres en écriture fractionnaire

Diviser par un nombre non nul revient **à multiplier par son inverse.**

Exemples : *Calculer et simplifier les résultats lorsque c'est possible :*

$I = \frac{-10}{3} \div \frac{-4}{7}$	$J = \frac{1}{-9} \div 8$	$K = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{8}{9}} = \frac{5}{2} \div \frac{8}{9}$	$L = \frac{3}{\frac{-6}{7}} = 3 \div \frac{-6}{7}$
$I = \frac{-10}{3} \times \frac{7}{-4}$	$J = \frac{1}{-9} \times \frac{1}{8}$	$K = \frac{5}{2} \times \frac{9}{8}$	$L = 3 \times \frac{7}{-6}$
$I = \frac{-70}{-12} = \frac{35}{6}$	$J = \frac{1}{-72}$	$K = \frac{45}{16}$	$L = \frac{21}{-6} = \frac{7}{-2}$

Leçon 7

Puissances

$5^3 = 5 \times 5 \times 5$

I - Définitions d'une puissance entière

1) Puissance d'exposant positif

Définition : Soient $\boldsymbol{a}$ un nombre relatif et $\boldsymbol{n}$ un nombre entier positif non nul.
L'écriture $\boldsymbol{a^n}$ désigne **le produit de $\boldsymbol{n}$ facteurs égaux à $\boldsymbol{a}$.**

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \;\; facteurs}}$$

L'écriture $\boldsymbol{a^n}$ se lit **« *a* exposant $\boldsymbol{n}$ »**.

Exemples :

- 2^7 est le produit de sept facteurs égaux à 2. 2^7 se lit « 2 **exposant** 7 ».

$$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128$$

- $(-1)^6$ est le produit de six facteurs égaux à (-1). $(-1)^6$ se lit « -1 **exposant** 6 ».

$$(-1)^6 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1$$

- $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{243}{1024}$
- $5{,}8^3 = 5{,}8 \times 5{,}8 \times 5{,}8 = 195{,}112$

Cas particuliers : $\boldsymbol{1^n = 1}$ et $\boldsymbol{a^1 = a}$
$\boldsymbol{0^n = 0}$ pour tout nombre n entier positif non nul.
$\boldsymbol{0^0}$ **n'existe pas !**
$\boldsymbol{a}^2 = a \times a$ se lit « *a* **au carré** » et $\boldsymbol{a^3} = a \times a \times a$ se lit « *a* **au cube** ».

Convention à savoir par cœur : $\boldsymbol{a^0 = 1}$ pour tout nombre relatif $a \neq 0$

Exemples :

- 4^3 se lit « 4 au cube » et $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

  $(-7)^2$ se lit « - 7 au carré » et $(-7)^2 = (-7) \times (-7) = 49$
- $1^{547} = 1$ $\quad 0^{96} = 0$ $\quad (-2018)^1 = -2018$ et $(-1)^{2018} = 1$
- D'après la convention : $89{,}6^0 = 1$ et $(-17)^0 = 1$

Remarque :
Le signe du résultat dépend de la parité de l'exposant (pair ou impair) mais aussi de la présence ou non de parenthèses :

$(-3)^4$ est **<u>positif</u>** car c'est le produit de 4 facteurs négatifs et 4 est **<u>pair</u>**.
$(-3)^7$ est **<u>négatif</u>** car c'est le produit de 7 facteurs négatifs et 7 est **<u>impair</u>**.
$-\boldsymbol{3^6}$ est <u>négatif</u> car « il y a un **seul signe moins** dans le produit » :

$$\boldsymbol{-3^6 = -3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}$$

II - Priorités opératoires avec des puissances (ou des racines carrées)

• En l'absence de parenthèse, on effectue **d'abord le calcul des puissances ou des racines carrées**, avant d'effectuer les autres opérations.
• En présence de parenthèses, on effectue d'abord **les calculs entre parenthèses**.

Exemples : ***Calculer en écrivant les étapes :***

$-9^2 - 2^4 \times 5 = -81 - 16 \times 5$
$= -81 - 80$
$= -161$

$7 - (-12 + 10)^3 = 7 - (-2)^3$
$= 7 - (-8)$
$= 7 + 8$
$= 15$

Les mêmes priorités sont faites avec les racines carrées :

$-9 + \sqrt{25} = -9 + 5 = -4$

$\sqrt{(71 - 7)} = \sqrt{64} = 8$

III - Les puissances de 10

Soit n un entier strictement positif. On a :

$\mathbf{10^n = 10 \times \ldots \times 10 = \underbrace{1000\ldots00}_{n\ zéros}}$ et $\mathbf{10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots001}_{n\ zéros}}$

Si $n = 0$, alors $\mathbf{10^0 = 1}$

Exemples :

$10^8 = 100\,000\,000$ L'exposant est 8 : on met donc 8 zéros après le chiffre 1.

$10^{-5} = \frac{1}{10^5} = \frac{1}{100\,000} = 0{,}000\,01$ L'exposant est -5 : on met donc 5 zéros avant le chiffre 1.

Propriété :

- Multiplier un nombre par $\mathbf{10^n}$ revient à décaler la virgule de ***n*** **rangs vers la droite.**
- Multiplier un nombre par $\mathbf{10^{-n}}$ revient à décaler la virgule de ***n*** **rangs vers la gauche**.

Exemples : $5{,}4 \times 10^7 = 54\,000\,000$ On a décalé la virgule de 7 rangs vers la droite.

$\frac{390}{100\,000} = 390 \times 10^{-5} = 0{,}0039$ On a décalé la virgule de 5 rangs vers la gauche.

IV - Écriture (ou notation) scientifique

Définition :

Un nombre est écrit en **notation scientifique** quand il est écrit sous la forme $\mathbf{a \times 10^n}$ où :

- a est un **nombre décimal qui s'écrit avec un seul chiffre non nul avant la virgule**
- *n* est un nombre entier relatif.

Exemples : $-835\,000\,000 = -8{,}35 \times 10^8$ $0{,}000\,000\,26 = 2{,}6 \times 10^{-7}$

V - Préfixes liés aux puissances de 10

Voici le tableau des préfixes à connaître au collège :

valeurs	*puissances de 10*	*préfixes*	*symboles*	*Origines grecques ou latines*
1 000 000 000 000	$\mathbf{10^{12}}$	**téra**	**T**	*teras* : monstre
1 000 000 000	$\mathbf{10^{9}}$	**giga**	**G**	*gigas* : géant
1 000 000	$\mathbf{10^{6}}$	**méga**	**M**	*megas* : grand
1 000	$\mathbf{10^{3}}$	**kilo**	**k**	*khilioi* : mille
100	$\mathbf{10^{2}}$	**hecto**	**h**	*hekaton* : cent
10	$\mathbf{10^{1}}$	**déca**	**da**	*deka* : dix
0,1	$\mathbf{10^{-1}}$	**déci**	**d**	*decimus*
0,01	$\mathbf{10^{-2}}$	**centi**	**c**	*centimus*
0,001	$\mathbf{10^{-3}}$	**milli**	**m**	*millesimus*
0,000 001	$\mathbf{10^{-6}}$	**micro**	**µ**	*mykros* : petit
0,000 000 001	$\mathbf{10^{-9}}$	**nano**	**n**	*nannos* : nain

Exemples :

- En informatique, l'**octet** est une unité de mesure : elle permet de quantifier la capacité de stockage d'un appareil ou la qualité d'une photo, d'une vidéo ou de tout autre document numérique.

Un disque dur d'1 To signifie qu'il a une capacité de 1 000 000 000 000 octets. (1 000 000 000 000 se lit « mille milliards »)

Une photo de 4,3 Mo signifie qu'elle est constituée d'informations pesant

$4{,}3 \times 10^{6} =$ 4 300 000 octets.

Une vidéo de 7,8 Go signifie qu'elle est constituée d'informations pesant

$7{,}8 \times 10^{9} =$ 7 800 000 000 octets.

- Les **nanoparticules** sont des particules de la taille d'un **nanomètre** : un nanomètre a la taille d'un mètre partagé en un milliard de parties égales, ou encore un millimètre partagé en un million de parties égales.

D'après le tableau, on peut écrire : **1 nm = $\mathbf{10^{-9}}$ m**

Donc 2 nm = 2×10^{-9} m

3 nm = 3×10^{-9} m etc…

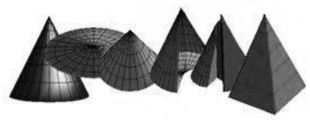
- De la même façon, on peut écrire : 8 mL = 8×10^{-3} L

45 kg = 45×10^{3} g

3,2 Mo = $3{,}2 \times 10^{6}$ o

Leçon 8

Solides



I – Pyramides

Définitions :

◆ **Une pyramide** est un solide avec :

- une face qui est un **polygone** (par exemple : un triangle ou un carré ou un pentagone...) Cette face s'appelle **<u>la base</u> de la pyramide.**
- les autres faces, appelées les **faces latérales** qui sont des triangles **ayant un sommet commun** : ce point s'appelle **<u>le sommet</u> de la pyramide**.

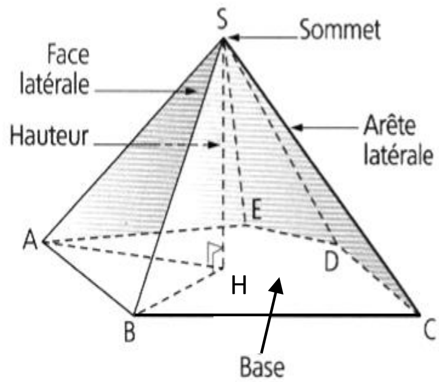
◆ **La <u>hauteur</u>** d'une pyramide est le segment issu du sommet de la pyramide et qui est **perpendiculaire** à la base de la pyramide.

◆ **Les arêtes latérales** sont les segments joignant les sommets de la base au sommet de la pyramide.

◆ Une **pyramide régulière** est une pyramide dont la base est un **polygone régulier** (c'est-à-dire ayant tous ses côtés de même longueur et tous ses angles de même mesure) et dont les faces latérales sont des **triangles isocèles superposables**.

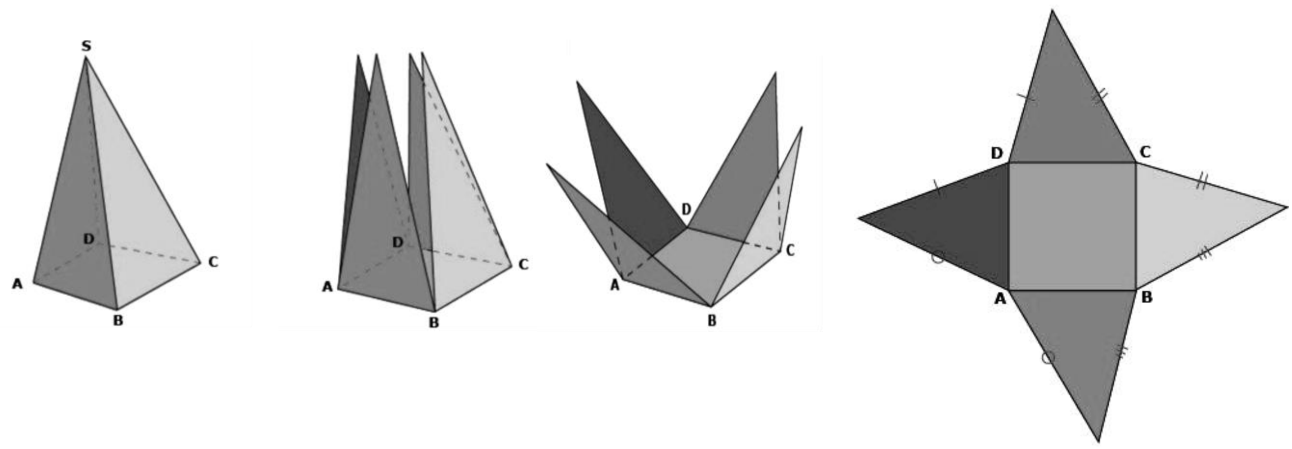
<u>Représentation d'une pyramide en perspective cavalière :</u>

La pyramide ci-contre a pour <u>sommet S</u>.
Elle s'appelle <u>S</u>ABCDE : sa base est le pentagone ABCDE.
Elle a donc cinq faces latérales : ce sont les cinq triangles SAB, SBC, SCD, SDE, SEA.
La hauteur de cette pyramide est le segment [SH].



<u>Patron d'une pyramide :</u>

Le patron d'une pyramide est constitué d'un **polygone** qui représente la base et d'autant de **triangles** que le polygone a de côtés : chaque triangle représente une face latérale.



Voici une pyramide que l'on « déplie » pour obtenir son patron.

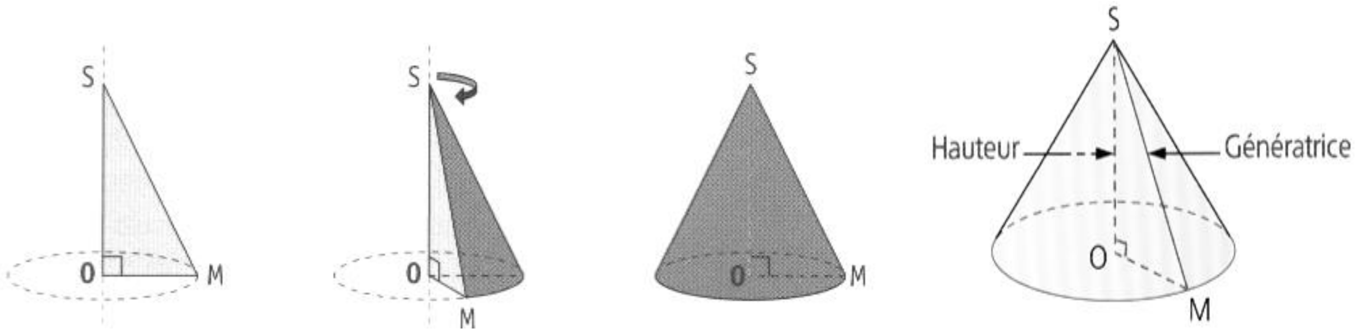
ⓘ Les segments qui **se superposent** doivent absolument avoir la même longueur !
Du coup, pour tracer les côtés des faces latérales, on reporte les longueurs avec le compas**.**

II – Cônes de révolution

Définitions :

◆ Un **cône de révolution** est un solide généré par un **triangle rectangle en rotation** autour de l'un des côtés de son angle droit.
◆ L'**hypoténuse** du triangle rectangle est appelée **une génératrice du cône**.
◆ **La base** du cône de révolution est **un disque.**
◆ **La hauteur** du cône de révolution est le segment qui joint **le centre** de ce disque au **sommet** du cône : cette hauteur est **perpendiculaire** au disque de base.

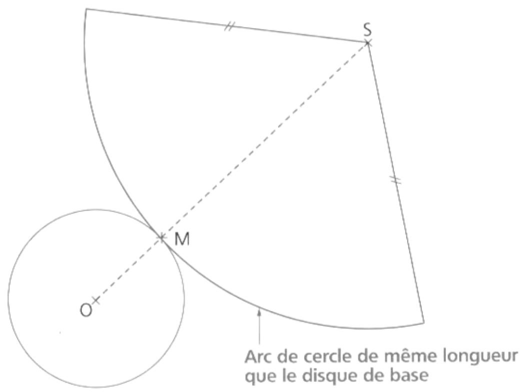
Représentation d'un cône de révolution en perspective cavalière :



Le triangle SOM est rectangle en O, son hypoténuse est [SM].
Ce triangle tourne autour de son côté [SO] : on obtient un cône de révolution de sommet S.
La base de ce cône est le disque de centre O et de rayon [OM].
La hauteur du cône est [SO]. Le segment [SM] est une génératrice de ce cône.

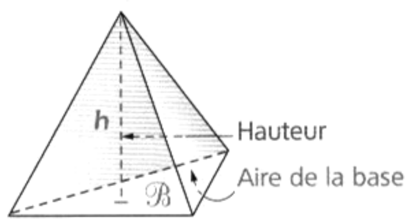
Patron d'un cône de révolution :
Le patron d'un cône de révolution est constitué d'un **disque** qui représente la base du cône et d'une **portion de disque** qui représente la surface latérale.

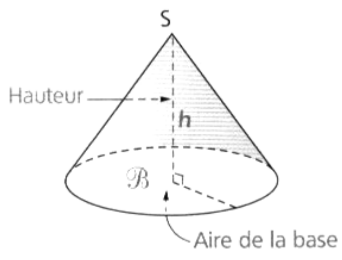
Pour pouvoir « fermer » le patron et former le cône, il faut que la longueur du cercle de base soit égale à la longueur de l'arc de cercle de la surface latérale.



III – Calculs de volumes

Pour **calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône** de révolution, on utilise la formule suivante :





$$\boldsymbol{V = \frac{aire\ de\ la\ base\ \times\ hauteur}{3}}$$

Rappel : Aire d'un disque = $\boldsymbol{\pi} \times \boldsymbol{r}^2$

Leçon 9

Statistiques

I - Effectifs et fréquences d'une série statistique

Définitions :

- Une **série statistique** est un ensemble de données ou valeurs, récoltées lors d'un sondage par exemple.
- **L'effectif d'une donnée** dans une série statistique est le **nombre de fois** où cette donnée apparaît.
- **L'effectif total** est le **nombre total de données** (ou valeurs) de la série.
- **La fréquence** d'une donnée est le **quotient de son effectif par l'effectif total** (résultat de la division). La fréquence est souvent donnée sous forme de pourcentage.

Exemple : *une enquête a été réalisée auprès de 400 collégiens pour savoir le moyen qu'ils préfèrent utiliser pour communiquer avec leurs ami(es). Complète le tableau :*

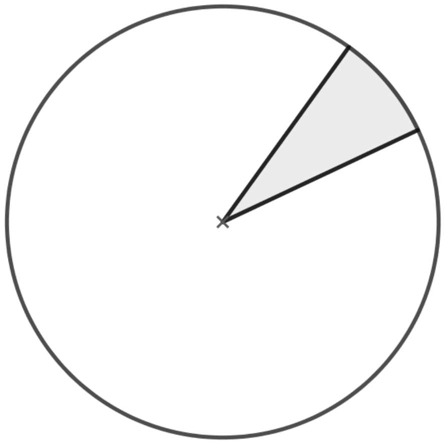
	SMS	Instagram	Facebook	Snapchat	TOTAL
effectifs	8	206	57	129	400
fréquences (en %)	2	51,5	14,25	32,25	100

L'effectif total de cette série statistique est 400 : ce nombre correspond au nombre de collégiens interrogés.

II - Diagramme circulaire

Les données d'une série statistique peuvent être représentées par un **diagramme circulaire** (en forme de disque).

Le disque complet (360 °) représente 100 % et il y a **proportionnalité** entre la **taille de la portion** de disque représentant chaque moyen de communication et les **fréquences** obtenues pour chacun.
Sur le diagramme ci-contre, on a déjà grisé la portion de disque représentant les SMS.



Moyen de communication le plus utilisé chez les collégiens

☐ SMS ☐ Instagram ☐ Facebook ☐ Snapchat

On calcule les angles de chaque portion de disque grâce à un tableau de proportionnalité.
Puis, à l'aide du rapporteur, on trace le secteur qui convient sur le diagramme.
On complète ensuite la légende du diagramme par les couleurs de son choix.

	SMS	Instagram	Facebook	Snapchat	TOTAL
Fréquences (en %)	2	51,5	14,25	32,25	100
Angle (en °)	7,2	185,4	51,3	116,1	360

$\times 3,6$

III - Moyenne des valeurs d'une série statistique

Définition : Pour calculer **la moyenne** des valeurs d'une série :

- on **ajoute** toutes les valeurs de la série
- puis on **divise cette somme par l'effectif total** de la série.

Exemple 1 : **Voici les prix observés dans plusieurs cinémas de la région pour une place de cinéma : 6 € 9,50 € 7,60 € 10 € 9,90 €**

Quel est le prix moyen d'une place de cinéma dans la région ? *Écris ton calcul :*
$(6 + 9{,}50 + 7{,}60 + 10 + 9{,}90) \div 5 = 8{,}6$
Le prix moyen d'une place de cinéma dans la région est donc de 8,60 euros.

Exemple 2 : **Voici le relevé des températures observées à Tokyo à midi pour les jours du mois de mars 2015 :**

Température (en °C)	**- 6**	**- 3**	**- 1**	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
Nombre de jours	**3**	**5**	**7**	**1**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**

Les nombres -6 et 3 de la première colonne signifient qu'il y a eu 3 jours à -6° durant ce mois de mars.
Combien y a-t-il eu de jours à 10°C ? 2
Quel est l'effectif total (c'est-à-dire le nombre total de jours) ? 31
Quelle est la température moyenne pour ce mois de mars ? *Écris ton calcul :*
$(3 \times -6 + 5 \times -3 + 7 \times -1 + 1 \times 1 + 3 \times 2 + 4 \times 4 + 5 \times 6 + 1 \times 8 + 2 \times 10) \div 31 \approx 1{,}32$.
La température moyenne pour ce mois de mars est d'environ 1,3 °C.

Leçon 10

Probabilités : dénombrement et expériences aléatoires

I – Dénombrement

Dénombrer, c'est compter des objets.

Pour compter les objets <u>sans en oublier</u>, on essaie d'être ***méthodique***, c'est-à-dire de ne pas compter dans n'importe quel ordre : il faut être **OR-GA-NI-SÉ** !

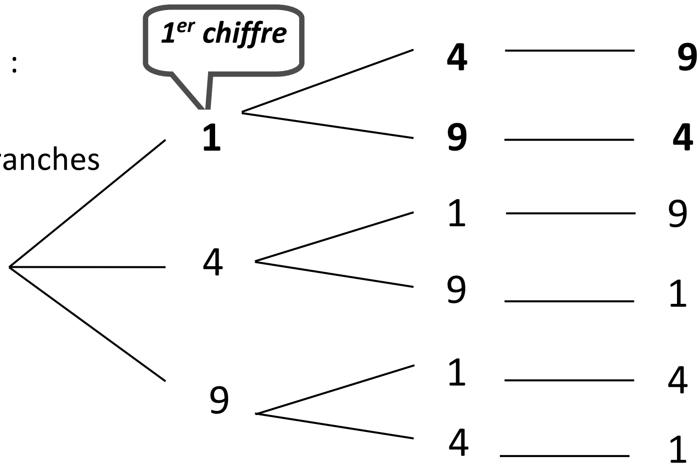
<u>Exemples :</u>

• Combien de nombres de 3 chiffres peut-on construire avec les chiffres 1, 4, et 9 ?

<u>Méthode 1</u> : On peut faire une liste de tous les nombres possibles en comptant d'abord combien de nombres on peut faire en commençant par le chiffre 1 :
On peut fabriquer les nombres 1 4 9 et 1 9 4.
Continue à compter en expliquant un peu : 4 1 9 ; 4 9 1 ; 9 1 4 ; 9 4 1

<u>Méthode 2</u> : On peut aussi compter en faisant « **un arbre des possibles** » :

Chaque « chemin » (en suivant les branches de gauche à droite) correspond à un nombre possible.



Combien de nombres impairs fabrique-t-on ? 4 nombres impirs.

On note chaque nombre obtenu sur un morceau de papier et on met tous les morceaux de papier dans une urne opaque.
On tire ***au hasard*** un morceau de papier et on regarde le nombre inscrit dessus.
On appelle cela une **expérience aléatoire**.

☞ On peut dire que l'on aurait :

2 chances sur 6 de tirer un nombre commençant par 4.

2 chances sur 6 de tirer un nombre pair.

4 chances sur 6 de tirer un nombre plus grand que 300.

II - Vocabulaire et définitions

Le lancé d'une pièce de monnaie ou d'un dé, le tirage d'une carte dans un jeu de cartes, ou le tirage d'une boule dans une urne, etc…sont appelés des **expériences.**

Définitions :

- Chacun des **résultats possibles** d'une expérience est appelé **une issue.**
- Une expérience est dite **aléatoire** lorsque **l'on ne peut pas prévoir** avec certitude quel résultat se produira. Le résultat est déterminé par le **hasard.**

Exemples :

• Lorsqu'on lance **une pièce de monnaie** non truquée (on dit que la pièce est « **équilibrée »**) et que l'on regarde la face supérieure, l'expérience est aléatoire et il y a **2 issues possibles : pile et face.**

• Lorsqu'on lance un **dé « équilibré » à 6 faces** et que l'on regarde le nombre de points inscrits sur la face supérieure, l'expérience est aléatoire et il y a **6 issues possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.**

• On reprend notre exemple de la page précédente avec les **papiers sur lesquels ont été inscrits les nombres que l'on peut fabriquer avec les 3 chiffres 1, 4 et 9**. On tire un papier au hasard et on regarde le nombre inscrit dessus. Peux-tu citer les issues possibles ?
149 ; 194 ; 419 ; 491 ; 914 ; 941

Définitions :

• **Un évènement** est une condition qui peut ou non, être réalisée lors de l'expérience.
Un évènement peut être réalisé par **zéro, une ou plusieurs issues**.
• **Un évènement élémentaire** est un évènement réalisé par **une seule issue**.

Exemples :

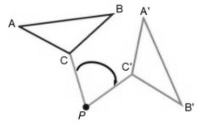
• **On lance un dé à 6 faces et on regarde le nombre inscrit sur la face supérieure.**
- L'évènement « *On obtient 4* » est un évènement réalisé par une seule issue : 4.
  C'est un évènement élémentaire.
- L'événement « *On obtient un chiffre pair* » est réalisé par 3 issues : 2, 4 et 6.
  Ce n'est pas un évènement élémentaire.

☞ On peut dire que l'on a 3 chances sur 6 d'avoir un chiffre pair, ce qui revient à une chance sur deux.

• On tire au hasard un papier avec les nombres inscrits dessus.
- L'évènement « On obtient un nombre plus petit que 150 » est un évènement réalisé par une seule issue : 149 . C'est un évènement élémentaire.
- L'évènement « On obtient un nombre impair » est un évènement réalisé par plusieurs issues : 194 et 914 . Ce n'est pas un évènement élémentaire.

Leçon 11

Transformations du plan

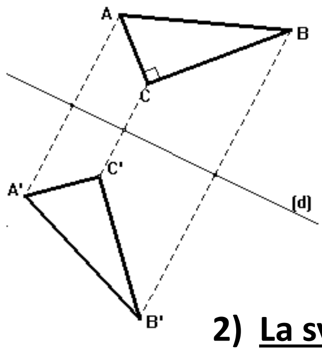


Une transformation est un procédé qui, à **une figure, fait correspondre une autre figure**, appelée **son image**.

I - Transformations déjà étudiées

1) La symétrie axiale

Deux figures sont **symétriques** par rapport à **un axe** si elles se superposent lorsqu'on plie le long de cet axe.
Cette transformation géométrique conserve les mesures de la figure initiale.



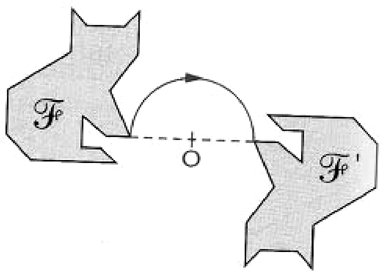
Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la symétrie d'axe la droite (d).

Constructions possibles :

- Avec l'équerre et la règle graduée
- Au compas

2) La symétrie centrale

Deux figures sont **symétriques** par rapport **à un point** si elles se superposent après **un demi-tour** autour de ce point appelé **le centre de la symétrie.**
Cette transformation géométrique conserve les mesures de la figure initiale.



Sur la figure ci-contre, la figure F' est l'image de F par la symétrie de centre O.

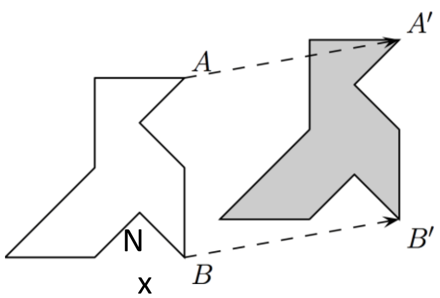
Constructions possibles :

- Avec la règle graduée.
- Avec la règle et le compas.

II - De nouvelles transformations

1) La translation

Une translation est le déplacement ou le glissement d'une figure dans une **direction** donnée, un **sens** donné et une **longueur** donnée.
Cette transformation géométrique conserve les mesures et l'orientation de la figure de départ.



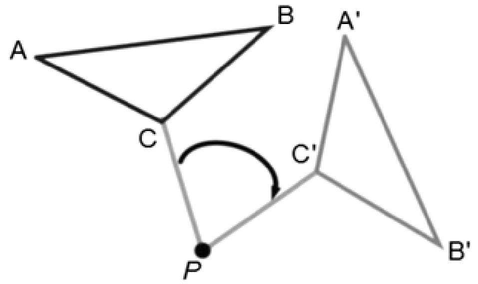
Sur la figure ci-contre, la figure grise est l’image de la figure blanche par la translation qui transforme A en A’, ou B en B’.

Construction possible :

- Au compas : le point A’ étant donné, on construit B’ tel que AA’B’B soit un parallélogramme.

2) La rotation

Une rotation est le déplacement circulaire d'une figure selon **un sens** et **un angle** donnés, **autour d'un point** (appelé **centre de rotation**).
Cette transformation géométrique conserve les mesures de la figure initiale.



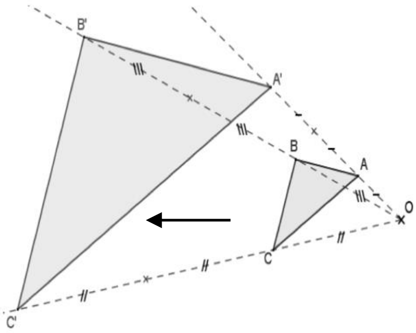
Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la rotation de centre P et d'angle $\widehat{CPC'}$ dans le sens des aiguilles d'une montre.

Construction possible :

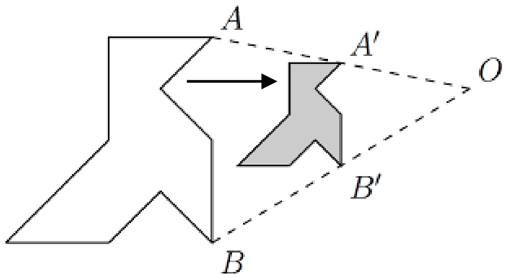
- Avec un rapporteur et un compas.

3) L'homothétie

Une homothétie est une transformation géométrique qui agrandit ou qui réduit une figure tout en conservant sa forme initiale. Elle est définie par un **centre et un rapport**.



Sur cette figure, le grand triangle A'B'C' est l'image du petit triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 3.
(***Quand le rapport est supérieur à 1, c'est un agrandissement*** : ici, le grand triangle est trois fois plus grand que le petit)



Sur la figure ci-contre, la figure grise est l'image de la figure blanche par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2}$
(les longueurs sont divisées par 2).
(***Quand le rapport est inférieur à 1, c'est une réduction).***

Construction possible : ➢ Avec une règle et un compas.

III – Frises et pavages

• **Une frise** est une bande de plan dans laquelle un motif **se répète régulièrement**.

Exemple :

Chaque vague est l'image par translation de celle qui précède.

• **Un pavage** est une portion de plan dans laquelle un motif **se répète régulièrement**.

Exemple :
Sur le pavage ci-contre, le même motif se répète en blanc, gris, ou noir.
Plusieurs transformations sont utilisées :
rotation, symétrie axiale et translation.

Œuvre de Maurits Cornelis Escher