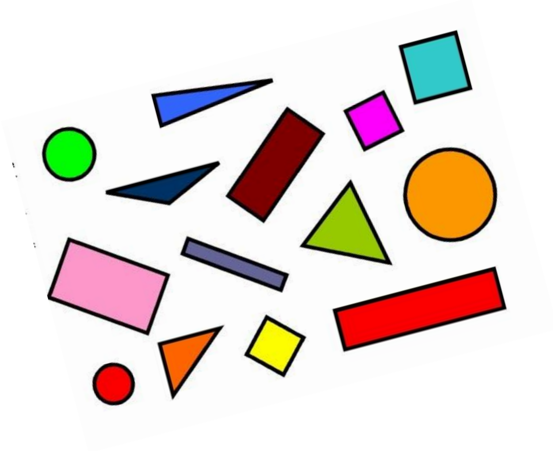
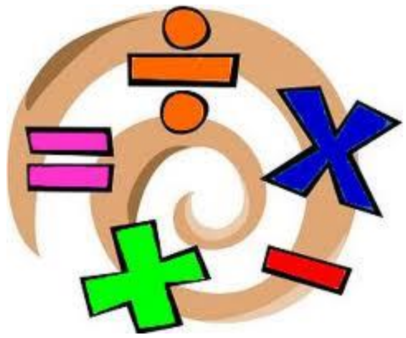


Livret de leçons

Mathématiques

3ème



Nom et prénom : ……………………………………………………………………………………

Classe : ………………

Professeurs : …………………………………

Année scolaire 202…/202…

Les tables de multiplication

1	2	3	4
1 × 1 = 1	**2** × 1 = 2	**3** × 1 = 3	**4** × 1 = 4
1 × 2 = 2	**2** × 2 = 4	**3** × 2 = 6	**4** × 2 = 8
1 × 3 = 3	**2** × 3 = 6	**3** × 3 = 9	**4** × 3 = 12
1 × 4 = 4	**2** × 4 = 8	**3** × 4 = 12	**4** × 4 = 16
1 × 5 = 5	**2** × 5 = 10	**3** × 5 = 15	**4** × 5 = 20
1 × 6 = 6	**2** × 6 = 12	**3** × 6 = 18	**4** × 6 = 24
1 × 7 = 7	**2** × 7 = 14	**3** × 7 = 21	**4** × 7 = 28
1 × 8 = 8	**2** × 8 = 16	**3** × 8 = 24	**4** × 8 = 32
1 × 9 = 9	**2** × 9 = 18	**3** × 9 = 27	**4** × 9 = 36
1 × 10 = 10	**2** × 10 = 20	**3** × 10 = 30	**4** × 10 = 40
5	**6**	**7**	**8**
5 × 1 = 5	**6** × 1 = 6	**7** × 1 = 7	**8** × 1 = 8
5 × 2 = 10	**6** × 2 = 12	**7** × 2 = 14	**8** × 2 = 16
5 × 3 = 15	**6** × 3 = 18	**7** × 3 = 21	**8** × 3 = 24
5 × 4 = 20	**6** × 4 = 24	**7** × 4 = 28	**8** × 4 = 32
5 × 5 = 25	**6** × 5 = 30	**7** × 5 = 35	**8** × 5 = 40
5 × 6 = 30	**6** × 6 = 36	**7** × 6 = 42	**8** × 6 = 48
5 × 7 = 35	**6** × 7 = 42	**7** × 7 = 49	**8** × 7 = 56
5 × 8 = 40	**6** × 8 = 48	**7** × 8 = 56	**8** × 8 = 64
5 × 9 = 45	**6** × 9 = 54	**7** × 9 = 63	**8** × 9 = 72
5 × 10 = 50	**6** × 10 = 60	**7** × 10 = 70	**8** × 10 = 80
9	**10**	**11**	**12**
9 × 1 = 9	**10** × 1 = 10	**11** × 1 = 11	**12** × 1 = 12
9 × 2 = 18	**10** × 2 = 20	**11** × 2 = 22	**12** × 2 = 24
9 × 3 = 27	**10** × 3 = 30	**11** × 3 = 33	**12** × 3 = 36
9 × 4 = 36	**10** × 4 = 40	**11** × 4 = 44	**12** × 4 = 48
9 × 5 = 45	**10** × 5 = 50	**11** × 5 = 55	**12** × 5 = 60
9 × 6 = 54	**10** × 6 = 60	**11** × 6 = 66	**12** × 6 = 72
9 × 7 = 63	**10** × 7 = 70	**11** × 7 = 77	**12** × 7 = 84
9 × 8 = 72	**10** × 8 = 80	**11** × 8 = 88	**12** × 8 = 96
9 × 9 = 81	**10** × 9 = 90	**11** × 9 = 99	**12** × 9 = 108
9 × 10 = 90	**10** × 10 = 100	**11** × 10 = 110	**12** × 10 = 120
		11 × 11 = 121	**12** × 11 = 132
			12 × 12 = 144

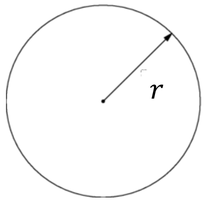
Sommaire des leçons

Formulaire : périmètres, aires et volumes

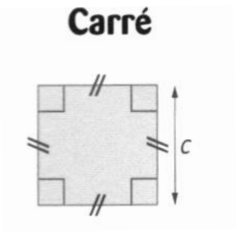
Périmètre d'un disque

La seule formule de périmètre qu'il faut apprendre est celle du disque :

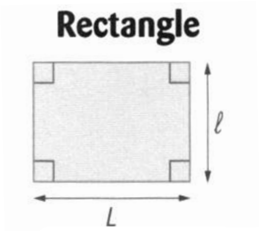
$$\mathcal{P}_{disque} = 2 \times r \times \pi \ \ ou\ 2\,\pi\, r$$



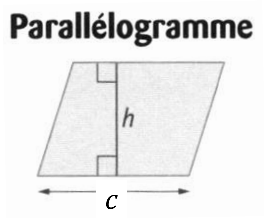
Aires des figures planes



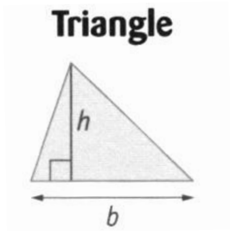
$\mathcal{A} = c \times c$
$= c^2$



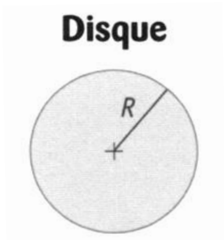
$\mathcal{A} = L \times l$



$\mathcal{A} = c \times h$

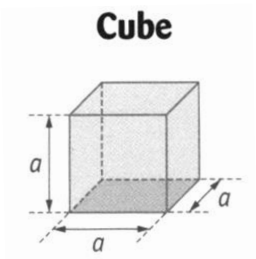


$\mathcal{A} = \dfrac{b \times h}{2}$

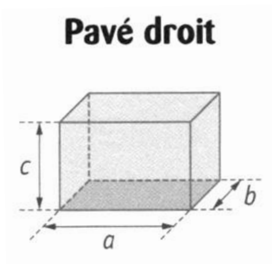


$\mathcal{A} = \pi \times R\ x\ R$
$= \pi R^2$

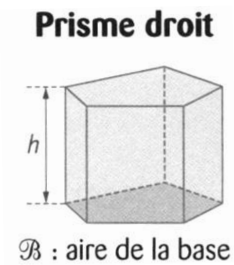
Volumes des solides



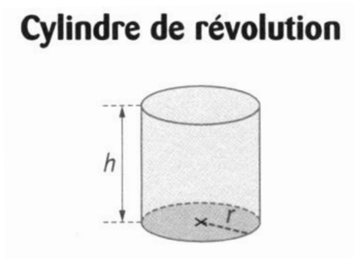
$\mathcal{V} = a \times a \times a$
$= a^3$



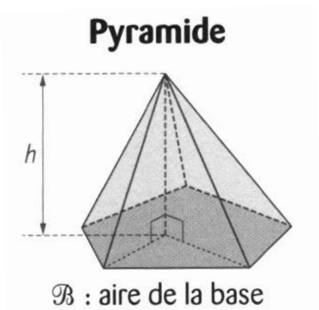
$\mathcal{V} = a \times b \times c$



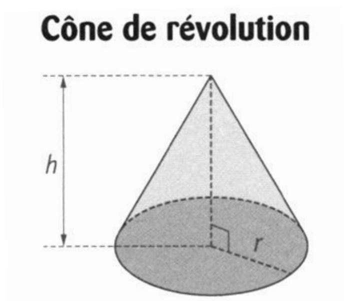
$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$



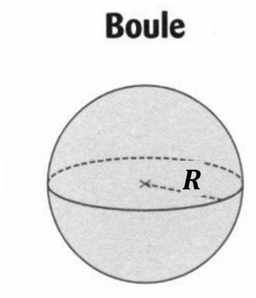
$\mathcal{V} = \pi \times r^2 \times h$



$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$



$\mathcal{V} = \dfrac{\pi \times r^2 \times h}{3}$



$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$

Rappels

Périmètre, aire d'une figure et volume d'un solide

longueur **1 cm** | **aire** **1 cm²** | **volume** **1 cm³**

I – Périmètre d'une figure

Le <u>périmètre</u> d'une figure est la **longueur de son contour**.

Le **périmètre d'un polygone** est donc la somme des longueurs de ses côtés.

Changement d'unités de longueur :

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
7	2	3	0	0	0	
		1	6	2	8	

Exemples de conversions :

723 000 cm = 723 dam

162,8 dm = 16,28 m

II – Aire d'une figure

L'<u>aire</u> d'une figure est la mesure de la surface située à l'intérieur de son contour.

L'unité d'aire de référence est **le *mètre carré*, noté *m²*.**

☞ **1 m²** est **l'aire d'un carré de 1 m de côté.**

Changement d'unités d'aire :

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
									1	5	8		
				9	4	2	0						
	0	0	8	7									

Exemples de conversions :

158 cm² = 1,58 dm²

94,2 dam² = 9 420 m²

8,7 hm² = 0,087 km²

III – Volume d'un solide

Le <u>volume</u> d'un solide est la mesure de **l'espace contenu à l'intérieur de ce solide**.

L'unité de volume de référence est le ***mètre cube*, noté *m³*.**

☞ **1 m³** est **le volume d'un cube de 1 m d'arête.**

Pour mesurer des volumes de liquides ou de gaz, on utilise les unités de capacité.

Une capacité de 1 L correspond à un volume de 1 dm³ :

1 L = 1 dm³

Changement d'unités de volume :

km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
											kL	hL	daL	L	dL	cL	mL			
		1	3	0	0															
										8	6	0	0	0						
																6	2	7	1	0

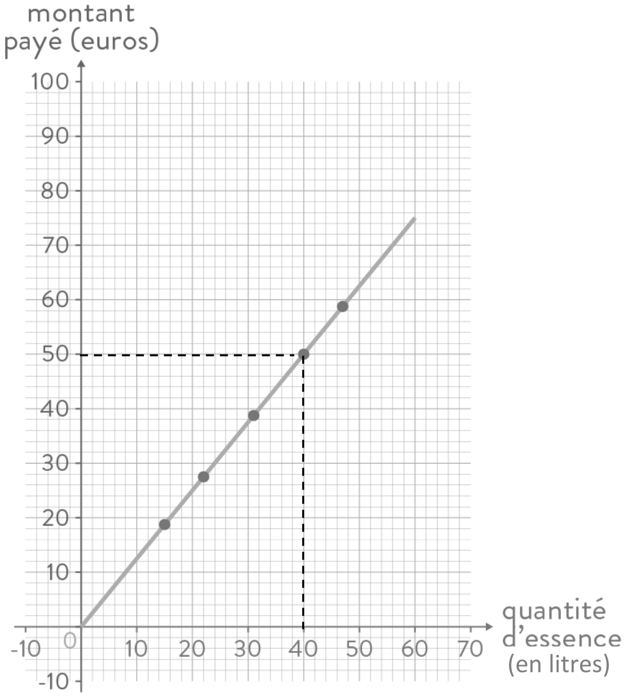
Exemples de conversions :

1,3 km³ = 1 300 hm³   86 000 L = 86 m³   62,71 cm³ = 62 710 mm³

Proportionnalité

Définition et coefficient de proportionnalité

- **Deux** grandeurs sont **proportionnelles** si les valeurs de l'une s'obtiennent **en multipliant** (ou en divisant) **par un même nombre** les valeurs de l'autre.
- Ce nombre par lequel on multiplie ou on divise une des grandeurs est appelé **coefficient de proportionnalité.**
- Graphiquement, lorsqu'on place les points d'un **tableau de proportionnalité** dans un repère, ils sont **alignés avec l'origine.**



Exemple :

Quantité d'essence (en litres)	**40**	47
Montant payé (en €)	**50**	58,75

$\times 1,25$

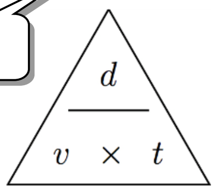
*Pour trouver le **coefficient de proportionnalité**, on divise le nombre de la $2^{ème}$ ligne par le nombre de $1^{ère}$ ligne*. Ici on fait

Produits en croix

Dans un tableau de proportionnalité, les « produits en croix » sont égaux.

Exemple : On peut calculer le nombre manquant : $\dfrac{3 \times 8}{5}$

5	***8***
3	?



Vitesse

Soient v **la vitesse d'un mobile,**
d **la distance parcourue**
et t **le temps du parcours**.

$$v = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{v} \qquad d = v \times t$$

Pourcentages

Exemples :

- ***Pour calculer 20% de 35 €***, on **multiplie** :

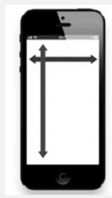
$$\frac{20}{100} \times 35 = \frac{700}{100} = 7 \text{ €}$$

- ***Pour calculer un pourcentage*** : 18 élèves sont DP parmi 25 élèves d'une classe.

« 18 élèves **sur** 25 » se calcule par une **division** : $\frac{18}{25}$ = 0,72 = 72 %

72 % des élèves de la classe sont DP.

Ratio

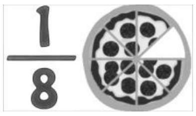


Exemples :

- Les dimensions L et l d'un écran de portable sont dans un **ratio 16 : 9** (« 16 pour 9 ») lorsque :

$$\frac{L}{l} = \frac{16}{9} \text{ ou encore } \frac{L}{16} = \frac{l}{9}$$

- Une photo de format 10 cm*15 cm est dans un **ratio 2 : 3** car $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$ *(fractions égales en simplifiant par 5)*



Écritures fractionnaires

- L'écriture fractionnaire $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ est l'écriture du **quotient** de $\boldsymbol{a}$ **divisé par** $\boldsymbol{b}$.
- Dans l'écriture fractionnaire $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$, $\boldsymbol{a}$ est **le <u>numérateur</u>** et $\boldsymbol{b}$ est **le <u>dénominateur</u>.**
- **<u>Quotients égaux</u>**

$\frac{-4}{7} = \frac{-12}{21}$ car on a multiplié le numérateur et le dénominateur par 3

$\frac{-49}{-56} = \frac{7}{8}$ car on a divisé le numérateur et le dénominateur par -7

- **<u>Additions et soustractions de quotients</u>**

Pour additionner ou soustraire deux nombres en écriture fractionnaire :
- on les écrit d'abord **<u>avec le même dénominateur</u>**
- puis on **ajoute ou on soustrait** les numérateurs et on garde le **dénominateur commun**.

<u>Exemples :</u>

$$A = \frac{-14}{5} - \frac{9}{10}$$
$$A = \frac{-28}{10} - \frac{9}{10}$$
$$A = \frac{-37}{10}$$

$$B = \frac{11}{6} - \frac{3}{4}$$
$$B = \frac{22}{12} - \frac{9}{12}$$
$$B = \frac{13}{12}$$

$$C = 7 + \frac{5}{8} = \frac{7}{1} + \frac{5}{8}$$
$$C = \frac{56}{8} + \frac{5}{8}$$
$$C = \frac{61}{8}$$

- **<u>Multiplications de quotients</u>**

Pour multiplier des nombres en écriture fractionnaire,
on **multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.**

<u>Exemples :</u>

$$F = \frac{7}{5} \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times \cancel{5}}{\cancel{5} \times 2} = \frac{35}{10} = \frac{7}{2}$$

On simplifie par 5 soit en « barrant » les 5,
soit en calculant puis simplifiant

$$G = -4 \times \frac{5}{9} = \frac{-4 \times 5}{1 \times 9} = \frac{-20}{9}$$

<u>Rappel :</u> $\boldsymbol{-4}$ **est égal à** $\boldsymbol{\frac{-4}{1}}$

- **<u>Divisions de quotients</u>**

Diviser par un nombre non nul revient **à multiplier par son inverse.**

<u>Exemples :</u>

$$I = \frac{10}{3} \div \frac{4}{7} = \frac{10}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{70}{12}$$

On multiplie par l'inverse de $\frac{4}{7}$

$$J = \frac{1}{-9} \div 8 = \frac{1}{-9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{-72}$$

On multiplie par l'inverse de 8

Rappels $\quad 3^{\text{ème}}$

Puissances

Puissances d'exposant positif

Soient *a* un nombre relatif et *n* un nombre entier positif non nul.

$$\boldsymbol{a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ facteurs}}}$$

Convention : $\boldsymbol{a^0 = 1}$

et $\boldsymbol{0^0}$ **n'existe pas !**

Carré et racine carrée

Soit *a* un nombre relatif :

$$\boldsymbol{a^2 = a \times a}$$

Soit *a* un nombre positif :

$\sqrt{\boldsymbol{a}}$ *est le nombre positif* ***dont le carré est a***

Puissances d'exposant négatif

Soient *a* un nombre relatif non nul et *n* un nombre entier.

$$\boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a \times a \times a \times \ldots \times a} = \frac{1}{a^n}}$$

Exemples :

- Calculer rapidement : $7^2 = 7 \times 7 = 49$

et $\sqrt{\boldsymbol{64}} = 8$ car $8 \times 8 = 64$

- Écrire sous forme de puissance :

$1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}3 \times 1{,}3 = 1{,}3^4$ et $\dfrac{1}{6\times6\times6\times6\times6} = \dfrac{1}{6^5} = 6^{-5}$

Puissances de 10

Soit *n* un nombre entier positif non nul.

$$\boldsymbol{10^n = \underbrace{10 \times 10 \times \ldots \times 10}_{n \text{ facteurs}} = \underbrace{1000\ldots\ldots00}_{n \text{ zéros}}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots\ldots001}_{n \text{ zéros}}}$$

Écriture scientifique

Un nombre est écrit en **notation scientifique** quand il est écrit sous la forme $\boldsymbol{a \times 10^n}$ où :

- a est un **nombre décimal qui s'écrit avec un seul chiffre non nul avant la virgule**
- n est un nombre entier relatif.

Exemples :

- Écrire sous forme de puissance de 10 :

$$10\,000\,000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$$

$$0{,}000\,1 = \frac{1}{10\,000} = \frac{1}{10\times10\times10\times10} = \frac{1}{10^4} = 10^{-4}$$

- Écrire en notation scientifique : $835\,000\,000 = 8{,}35 \times 10^8$ et $0{,}000\,000\,29 = 2{,}9 \times 10^{-7}$

Préfixes liés aux puissances de 10

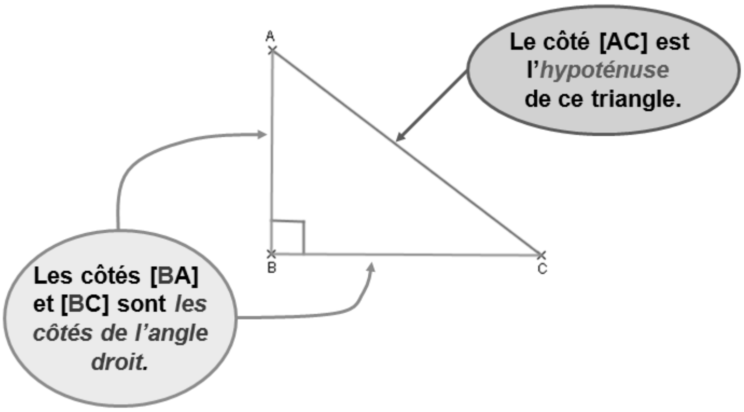
Téra (T) = 10^{12} **Giga** (G) = 10^9 **Méga** (M) = 10^6 **kilo** (k) = 10^3

milli (m) = 10^{-3} **micro** (µ) = 10^{-6} **nano** (n) = 10^{-9}

Le théorème de Pythagore et sa réciproque

<u>Rappel de vocabulaire :</u>

Dans un triangle rectangle, le côté <u>opposé au sommet de l'angle droit</u> s'appelle **l'hypoténuse**, c'est aussi le plus grand côté du triangle.
Les deux autres côtés s'appellent les **côtés de l'angle droit.**



<u>I - Théorème de Pythagore</u>

Si un triangle est **rectangle,** alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.**

<u>Utilisation</u> : Le théorème de Pythagore sert **à calculer la longueur d'un côté dans un triangle rectangle quand on connaît la longueur des deux autres côtés**.

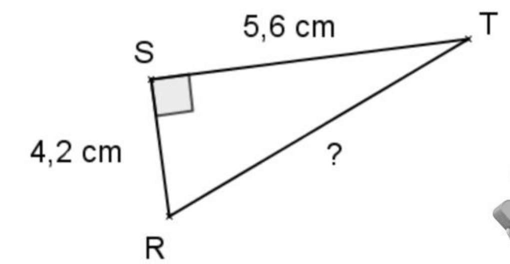
• *1ère application du théorème :* ***<u>Calculer la longueur de l'hypoténuse.</u>***

Soit RST un triangle rectangle en S tel que RS = 4,2 cm et ST = 5,6 cm. Calculer RT.

On sait que le triangle RST est rectangle en S.
On utilise le théorème de Pythagore :

[RT] est l'hypoténuse

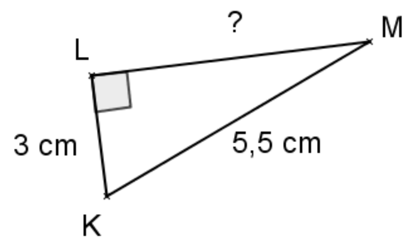
$$RT^2 = RS^2 + ST^2$$
$$RT^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2$$
$$RT^2 = 49$$
$$RT = \sqrt{49}$$
$$RT = 7\ cm$$



Donc le segment [RT] mesure 7 cm.

• *2ème application du théorème :* ***<u>Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit.</u>***

Soit KLM un triangle rectangle en L tel que KL = 3 cm et KM = 5,5 cm. Calculer LM.



On sait que le triangle KLM est rectangle en L.
On utilise le théorème de Pythagore :

[KM] est l'hypoténuse

$$KM^2 = KL^2 + LM^2$$
$$5{,}5^2 = 3^2 + LM^2$$
$$LM^2 = 5{,}5^2 - 3^2$$
$$LM^2 = 21{,}25$$
$$LM = \sqrt{21{,}25}$$
$$LM \approx 4{,}6\ cm$$

*Pour calculer la longueur d'un **<u>côté de l'angle droit</u>**, il faut faire **une <u>soustraction</u>** !*

*Donc le segment [LM] mesure **environ** 4,6 cm.*

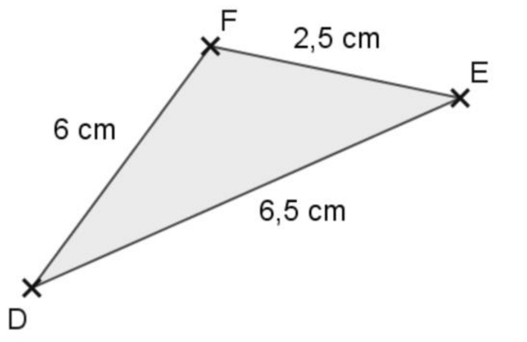
Remarque :
Il existe une conséquence du théorème de Pythagore (appelée **la contraposée** du théorème de Pythagore) : elle permet de montrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

II – Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

Utilisation : La réciproque du théorème de Pythagore sert
à démontrer qu'un triangle est rectangle.

Exemple d'application de la réciproque :
Soit un triangle DEF tel que DE = 6,5 cm ; DF = 6 cm et EF = 2,5 cm.
Démontrer que le triangle DEF est rectangle.



On sait que, dans le triangle DEF, [DE] *est le plus grand côté.*
On calcule *séparément* DE^2 *et* $DF^2 + FE^2$:

$DE^2 = 6{,}5^2$	$DF^2 + FE^2 = 6^2 + 2{,}5^2$
$= \mathbf{42{,}25}$	$= \mathbf{42{,}25}$

On constate que $DE^2 = DF^2 + FE^2$.
On conclut : *D'après la réciproque du théorème de Pythagore,*
le triangle DEF est donc rectangle en F.

Calcul littéral

I – Calculer l'opposé d'une expression littérale

Définitions :

- Un nombre et **son opposé** ont **une somme** égale à **zéro.**
- **L'opposé** d'une expression littérale est **l'opposé de chacun de ses termes**.

Exemples :

- L'opposé de 3 est -3.
- L'opposé de -11 est 11.
- L'opposé de x^2 est $-x^2$.
- L'opposé de $4y$ est $-4y$.
- L'opposé de $-5a$ est $5a$.
- L'opposé de $2x + 6b$ s'écrit $-(2x + 6b)$ et est égal à $-2x - 6b$.
- L'opposé de $-7a + 2y - 10$ s'écrit $-(-7a + 2y - 10)$ et est égal à $7a - 2y + 10$.

Rappels utiles

$\boldsymbol{x}$ signifie $\boldsymbol{1x}$

$\boldsymbol{x + x = 2x}$

$\boldsymbol{x \times x = x^2}$

$2x + 5 = \oslash$

$2x + 5x^2 = \oslash$

$\boldsymbol{2x + 5x = 7x}$

$\boldsymbol{2x \times 5 = 10x}$

$\boldsymbol{2x \times 5x = 10x^2}$

II - Développer une expression littérale

Définition :

Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme (ou une différence) en utilisant l'une des formules de **distributivité** suivantes :
Soient $k, a, b, c\ et\ d$ des nombres relatifs.

- **simple distributivité** : $\boldsymbol{k \times (a + b) = k \times a + k \times b}$

$$\boldsymbol{k \times (a - b) = k \times a - k \times b}$$

On dit que l'on **distribue le nombre $\boldsymbol{k}$** à la parenthèse.

- **double distributivité** :

$$\boldsymbol{(a + b) \times (c + d) = a \times c + a \times d + b \times c + b \times d}$$

Exemples : *Développer et réduire les expressions suivantes :*

- **simple distributivité** :

$A = x\,(7x - 4)$

$A = x \times 7x - x \times 4$

$\boldsymbol{A = 7x^2 - 4x}$

$B = -5\,(-3y + 2)$

$B = -5 \times (-3y) + (-5) \times 2$

$\boldsymbol{B = 15y - 10}$

$C = 8a\,(-10a - 6)$

$C = 8a \times (-10a) - 8a \times 6$

$\boldsymbol{C = -80a^2 - 48a}$

- **double distributivité** :

$D = (11 + 3y)(-y + 6)$

$D = 11 \times (-y) + 11 \times 6 + 3y \times (-y) + 3y \times 6$

$D = -11y + 66 - 3y^2 + 18y$

$\boldsymbol{D = -3y^2 + 7y + 66}$

III - Factoriser une expression littérale

Définition : **Factoriser une expression littérale**, c'est transformer une somme (ou une différence) en un produit de facteurs en utilisant une des deux formules suivantes : $\boldsymbol{k \times a + k \times b = k \times (a + b)}$

$\boldsymbol{k \times a - k \times b = k \times (a - b)}$

Le nombre k s'appelle **le facteur commun** aux deux termes de l'expression de départ.

Exemples : ***Factoriser les expressions suivantes :***

- **Le facteur commun est un nombre :**

$E = 14\,a - 21$

On reconnaît $\mathbf{7}$ comme facteur commun

$\boldsymbol{E = 7(2a - 3)}$

- **Le facteur commun est une lettre :**

$F = -x^2 + 6x$

On reconnaît $\boldsymbol{x}$ comme facteur commun

$\boldsymbol{F = x\,(-x + 6)}$

- **Le facteur commun est un nombre et une lettre :**

$G = 32y^2 - 28y$

On reconnaît $\boldsymbol{4y}$ comme facteur commun

$\boldsymbol{G = 4y\,(8y - 7)}$

IV – Identité remarquable

Soient a et b deux nombres relatifs.

On a la formule appelée **« identité remarquable »** dans le sens du développement :

$$\boldsymbol{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

On peut aussi l'utiliser dans le sens de la factorisation :

$$\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$$

Exemples : **Développer ou factoriser avec l'identité remarquable :**

On développe :

$(x + 3)(x - 3) = x^2 - 9$

$(2e + 5)(2e - 5) = 4e^2 - 25$

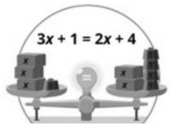
On factorise :

$100 - 36c^2 = (10 + 6c)(10 - 6c)$

$y^2 - 13 = (y + \sqrt{13})(y - \sqrt{13})$

Le nombre qui, au carré, fait 13 est

Équations



I - Vocabulaire

Définitions :

- **Une équation** est **une <u>égalité</u>** contenant **une inconnue** (souvent appelée x).
- **<u>Résoudre</u> une équation**, c'est trouver la ou les valeurs de x qui rendent cette égalité **vraie**.
- Ces valeurs s'appellent **les <u>solutions</u> de l'équation**.

Exemple : $\boldsymbol{3x+2=4x+1}$ est une équation **d'inconnue $\boldsymbol{x}$**.

◆ Si on remplace x par -3, on obtient à gauche : $3\times(-3)+2=-9+2=\mathbf{-7}$

et à droite : $4\times(-3)+1=-12+1=\mathbf{-11}$

☞ On ne trouve <u>pas le même résultat</u> dans les deux membres de l'équation, donc **– 3 n'est pas solution de l'équation**.

◆ Si on remplace x par 1, on obtient à gauche : $3\times1+2=3+2=\mathbf{5}$

et à droite : $4\times1+1=4+1=\mathbf{5}$

☞ On trouve <u>le même résultat</u> dans les deux membres de l'équation, donc **1 est solution de l'équation.**

II - Résolution d'une équation

Techniques de résolution :

a) On peut **ajouter ou soustraire un même nombre** aux deux membres d'une équation

b) On peut **multiplier ou diviser** chaque membre de l'équation **par un même nombre** non nul.

C'est-à-dire que, quels que soient les nombres relatifs *a*, *b* et *c*, on peut écrire :

Si $a=b$, alors : $a+\boldsymbol{c}=b+\boldsymbol{c}$ et $a-\boldsymbol{c}=b-\boldsymbol{c}$

Si $a=b$ et $c\neq0$, alors : $a\times\boldsymbol{c}=b\times\boldsymbol{c}$ et $\dfrac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{c}}=\dfrac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{c}}$

Exemple 1 :

On veut résoudre l'équation $\boldsymbol{4x-2=1}$.

- *<u>1ère étape :</u>* *On fait disparaitre le terme – 2 du premier membre*

On **ajoute 2** à chaque membre de l'équation et on réduit :

$$4x-2+\mathbf{2}=1+\mathbf{2}$$
$$4x=3$$

- *<u>2ème étape :</u>* *On fait disparaitre le facteur 4 du premier membre :*

On **divise chaque membre de l'équation par** 4 et on réduit :

$$\frac{4x}{4}=\frac{3}{4}$$
$$\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

<u>Conclusion :</u> **On dit que $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ est la solution de l'équation $\boldsymbol{4x-2=1}$.**

→ ***Vérification :***

On peut vérifier que l'on a juste <u>en remplaçant x</u> par $\frac{3}{4}$ dans le premier membre :

$$4x - 2 = 4 \times \frac{3}{4} - 2 = \frac{12}{4} - 2 = 3 - 2 = \mathbf{1}$$ On trouve bien 1 !

Le nombre $\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$ est donc solution de l'équation.

<u>Exemple 2 :</u>

On veut résoudre l'équation $-\boldsymbol{2x} - \mathbf{14} = \boldsymbol{3x} + \mathbf{26}$

- *<u>1ère étape :</u>*

On fait disparaitre le terme $\boldsymbol{3x}$ du second membre :

On **soustrait** $\boldsymbol{3x}$ à chaque membre de l'équation et on réduit :

$$-2x - 14 = 3x + 26$$
$$-2x - 14 - \boldsymbol{3x} = 3x + 26 - \boldsymbol{3x}$$
$$-5x - 14 = 26$$

- *<u>2ème étape :</u>*

On fait disparaitre le terme $-\mathbf{14}$ du premier membre :

On **ajoute $\mathbf{14}$** à chaque membre de l'équation et on réduit :

$$-5x - 14 + \mathbf{14} = 26 + \mathbf{14}$$
$$-5x = 40$$

- *<u>3ème étape :</u>*

On fait disparaitre le facteur $-\mathbf{5}$ du premier membre :

On **divise chaque membre de l'équation par $-\mathbf{5}$** et on réduit :

$$\frac{-5x}{\mathbf{-5}} = \frac{40}{\mathbf{-5}}$$
$$\boldsymbol{x} = \mathbf{-8}$$

<u>Conclusion :</u> **On dit que $-\mathbf{8}$ est la solution de l'équation $-\boldsymbol{2x} - \mathbf{14} = \boldsymbol{3x} + \mathbf{26}$**

→ ***Vérification :***

On peut vérifier que l'on a juste <u>en remplaçant x par -8</u> dans chaque membre :

Premier membre : $-2x - 14 = -2 \times (-8) - 14$
$= 16 - 14$
$= \mathbf{2}$

Second membre : $3x + 26 = 3 \times (-8) + 26$
$= -24 + 26$
$= \mathbf{2}$

*On trouve bien le **<u>même résultat</u>** dans les deux membres !*

On peut donc dire que pour $x = -8$, l'égalité $-2x - 14 = 3x + 26$ est vraie.

Le nombre $-\mathbf{8}$ est donc solution de l'équation.

III – Équation-produit nul

Propriété :
Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul : **si *A* = 0 ou *B* = 0 alors *A* × *B* = 0.**
Si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul : **si *A* × *B* = 0, alors *A* = 0 ou *B* = 0.**

Conséquence : *Soient a, b , c et d quatre nombres relatifs.*

Les solutions de l'équation-produit nul $\boldsymbol{(ax+b)(cx+d)=0}$

sont les solutions des deux équations : $\boldsymbol{ax+b=0}$ ***et*** $\boldsymbol{cx+d=0}$

Exemple : **Résoudre l'équation-produit nul :** $\boldsymbol{(2x+6)(-7x+4)=0}$.
Les solutions de cette équation-produit nul sont les solutions de ces deux équations :

$2x+6=0$	*et*	$-7x+4=0$
$2x=-6$		$-7x=-4$
$x=-3$		$x=\dfrac{4}{7}$

L'équation $(2x+6)(-7x+4)=0$ **a donc <u>deux solutions</u>** : -3 et $\dfrac{4}{7}$

Remarque : **Une équation qui, à priori, ne ressemble pas à une équation-produit nul, peut s'y ramener en factorisant !**

Exemple : L'équation $\boldsymbol{14x^2=21x}$ est « à priori », une équation qu'on ne sait pas résoudre car on n'a pas appris à résoudre des équations avec des x^2 !

MAIS, on va utiliser les petites techniques apprises et voir si on s'en sort petit à petit…
On enlève $21x$ à chaque membre : il reste : $\boldsymbol{14x^2-21x=0}$
On remarque que $14x^2$ et $21x$ ont en commun le x et la table du 7.
On peut donc factoriser par $7x$ et on obtient : $\boldsymbol{7x(2x-3)=0}$
On a maintenant une équation-produit nul avec les deux facteurs $7x$ et $(2x-3)$.
On résout donc les deux équations : $7x=0$ et $2x-3=0$

$$x=0 \qquad\qquad 2x=3$$

$$x=\frac{3}{2}$$

L'équation $\boldsymbol{14x^2=21x}$ **a donc deux solutions : 0 et $\boldsymbol{\frac{3}{2}}$.**

Remarque : Une équation de la forme $\boldsymbol{x^2=n}$ où n est un nombre positif peut se ramener à une équation produit-nul grâce à l'identité remarquable a^2-b^2.

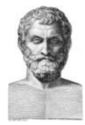
Exemple : Pour résoudre $x^2=81$, on enlève 81 aux deux membres et on obtient : $x^2-81=0$. On reconnaît l'identité remarquable a^2-b^2 que l'on peut factoriser avec la formule $(a+b)(a-b)$. On obtient donc : $(x+9)(x-9)$.
Puis on résout : $(x+9)(x-9)=0$. Ce qui revient à résoudre les deux équations :

$$x+9=0 \qquad \text{et} \qquad x-9=0$$

$$x=-9 \qquad\qquad x=9$$

L'équation $\boldsymbol{x^2=81}$ **a donc deux solutions : 9 et -9.**

Le théorème de Thalès et sa réciproque

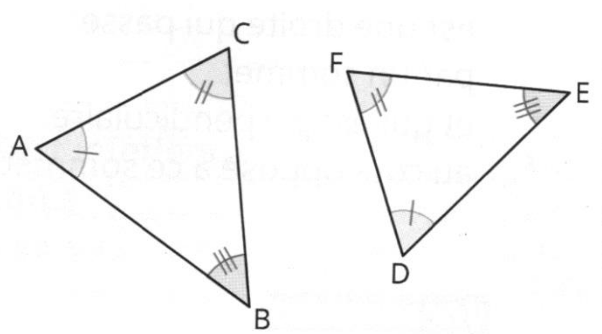


I – Triangles semblables, agrandissement et réduction

Définition :
Deux triangles semblables (on dit aussi deux triangles **de même forme**) sont deux triangles ayant les mêmes mesures d'angles.

Exemple :
Les deux triangles ABC et DEF sont semblables car ils ont les mêmes mesures d'angles :

$$\widehat{BAC} = \widehat{FDE}$$
$$\widehat{BCA} = \widehat{DFE}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{FED}$$

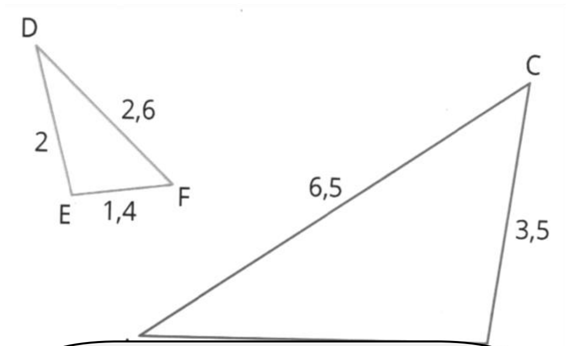


Dans cet exemple, le triangle ABC est plus grand que DEF :
on dit que le triangle ABC est **un agrandissement** du triangle DEF,
ou encore que le triangle DEF est **une réduction** du triangle ABC.

Méthode :
Pour pouvoir affirmer que deux triangles sont semblables, il suffit que deux angles de l'un soient égaux à deux angles de l'autre.

En effet, grâce à la somme des mesures des angles d'un triangle qui est toujours égale à 180°, on peut montrer que le troisième angle aura forcément la même mesure sur les deux triangles.
Preuve : *Admise ou faite en exercice.*

Propriété : Si les **longueurs** d'un triangle sont **proportionnelles** aux longueurs d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont **semblables.**



Exemple :
Les deux triangles ABC et DEF ont leurs longueurs proportionnelles, ils sont semblables.

Coefficient d'agrandissement : $\dfrac{\boldsymbol{grande\ longueur}}{\boldsymbol{petite\ longueur}}$

longueurs de DEF	1,4	2	2,6
longueurs de ABC	3,5	5	6,5

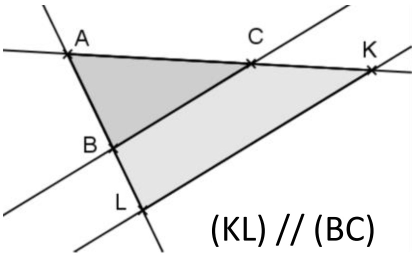
$\times 0,4$ $\times 2,5$

Coefficient de réduction : $\dfrac{\boldsymbol{petite\ longueur}}{\boldsymbol{grande\ longueur}}$

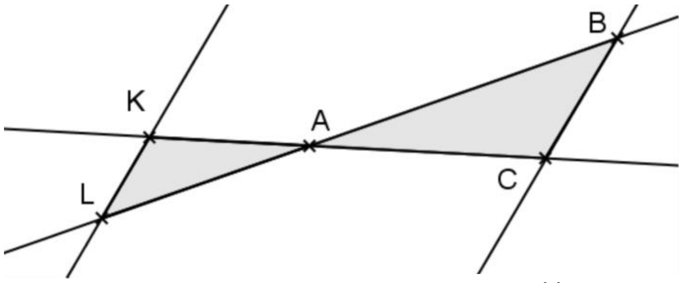
Le triangle ABC est **un agrandissement de coefficient** 2,5 (***plus grand que 1***) du triangle DEF.
Le triangle DEF est **une réduction de coefficient** 0,4 (***plus petit que 1***) du triangle ABC.

II - Théorème de Thalès

Voici les deux configurations possibles avec lesquelles on peut utiliser le théorème de Thalès :



(KL) // (BC)



configuration « papillon » (KL) // (BC)

<u>Théorème de Thalès</u> : Soient deux droites (CK) et (BL) <u>sécantes en A</u>.

Si les droites (BC) et (KL) sont <u>parallèles</u>, alors les quotients suivants sont **égaux** :

$$\frac{AB}{AL} = \frac{AC}{AK} = \frac{BC}{LK}$$

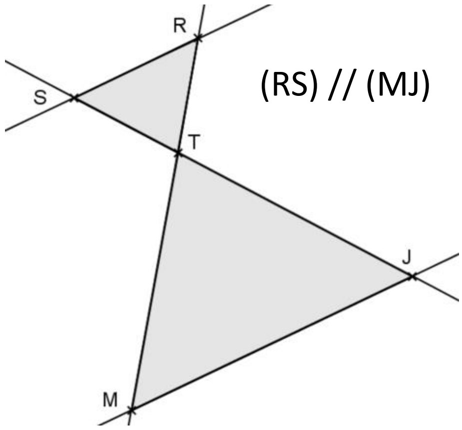
← triangle ABC

← triangle ALK

<u>Preuve</u> : La preuve de ce théorème est « admise », cela signifie que l'on va se servir de ce théorème sans le démontrer, sans expliquer pourquoi ce théorème est vrai.

<u>Utilisation</u> : Le théorème sert à ***calculer une longueur*** dans l'une des deux configurations ci-dessus.

<u>Exemple d'utilisation</u> : La figure n'est pas en vraie grandeur !



(RS) // (MJ)

On donne la figure avec les longueurs suivantes :

TR = 6 cm **TS = 2, 5 cm**

TJ = 4,5 cm **JM = 7,2 cm.** **Calculer SR et TM.**

◆ On sait que (SJ) et (RM) sont ***sécantes en*** T
et que les droites (RS) et (MJ) sont ***parallèles***.

◆ On utilise ***le théorème de Thalès*** qui donne les quotients égaux :

$$\frac{TS}{TJ} = \frac{TR}{TM} = \frac{SR}{JM}$$

On remplace par les longueurs connues dans l'énoncé : $\frac{2,5}{4,5} = \frac{6}{TM} = \frac{SR}{7,2}$

◆ On peut donc calculer SR et TM en utilisant ***l'égalité des produits en croix*** :

Calcul de SR :

$$\frac{2,5}{4,5} = \frac{SR}{7,2}$$

$$SR = \frac{2,5 \times 7,2}{4,5} = 4\ cm$$

La longueur SR est égale à 4 cm.

Calcul de TM :

$$\frac{2,5}{4,5} = \frac{6}{TM}$$

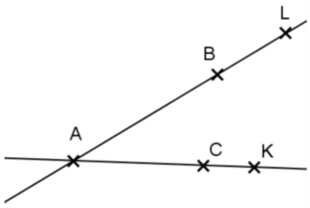
$$TM = \frac{4,5 \times 6}{2,5} = 10,8\ cm$$

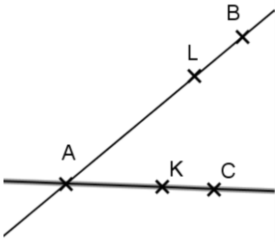
La longueur TM est égale à 10,8 cm.

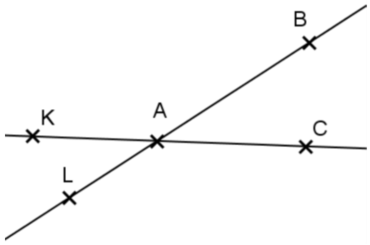
<u>Autre utilisation</u> : Le théorème de Thalès (plus précisément ***sa contraposée***) sert aussi à montrer que ***deux droites ne sont pas parallèles.***

III - Réciproque du théorème de Thalès

Sur chacune des figures ci-dessous, on dit que « les points A, B, L et les points A, C, K sont ***alignés dans le même ordre*** » :





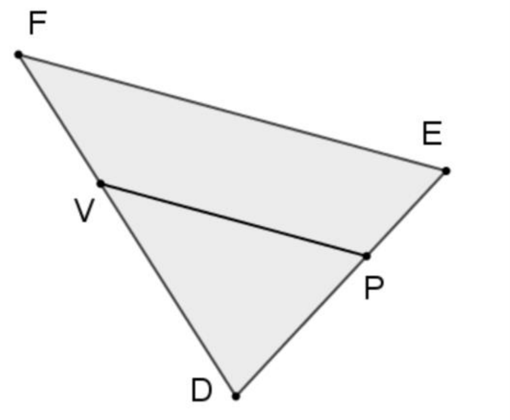


Réciproque du théorème de Thalès : Soient deux droites (BL) et (CK) sécantes en A.

Si les quotients $\frac{AB}{AL}$ et $\frac{AC}{AK}$ **sont égaux** et si les points A, B, L et les points A, C, K sont alignés dans le même ordre, **alors les droites (BC) et (LK) sont parallèles.**

Preuve : Comme le théorème, la preuve de cette réciproque sera également admise.

Utilisation : La réciproque du théorème de Thalès permet de ***démontrer que des droites sont parallèles***.



Exemple d'utilisation :

DEF est un triangle tel que :
DE = 8 cm ; DF = 6 cm
Les points P et V sont respectivement des points de [DE] et [DF] tels que DP = 5,6 cm et DV = 4,2 cm.
Démontrer que (PV) // (EF).

On sait que les droites (EP) et (VF) sont sécantes en D.
On calcule **séparément** les deux quotients (☞ *deux quotients suffisent* !) :

$$\frac{DP}{DE} = \frac{5{,}6}{8} = \frac{7}{10} \qquad \Big| \qquad \frac{DV}{DF} = \frac{4{,}2}{6} = \frac{7}{10}$$

🛈 ***Si la fraction donne un nombre à virgule qui « ne se termine pas », on laisse les quotients sous forme de fraction simplifiée au maximum !***

On constate que les deux quotients sont égaux : $\frac{DP}{DE} = \frac{DV}{DF}$

De plus, les points D, P, E et les points D, V , F sont **alignés dans le même ordre**.
Donc, ***d'après la réciproque du théorème de Thalès***, **les droites (PV) et (EF) sont parallèles**.

Arithmétique

On ne travaille ici qu'avec des ***nombres entiers positifs***
(appelés nombres entiers « naturels »).

I – Divisibilité : vocabulaire et définitions

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Définition :

Effectuer **la division euclidienne de a par b**,
c'est trouver deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$$\boldsymbol{a = q \times b + r} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{r < b}$$

$$\begin{array}{r|l} a & b \\ \hline \boldsymbol{r} & \boldsymbol{q} \end{array}$$

Le nombre $\boldsymbol{q}$ s'appelle **le quotient** et le nombre $\boldsymbol{r}$ s'appelle **le reste**
de cette division euclidienne.

Exemple : La division euclidienne de 65 par 9 donne 7 comme quotient et 2 comme reste car :
$65 = 7 \times 9 + 2$ et $2 < 9$

Définition :

Lorsque la division euclidienne de *a* par *b* a **un reste nul**, on dit que :

- *a* est **un multiple** de *b* *ou que* *a* est **divisible par** b
- *b* est **un diviseur** de *a* *ou que* *b* **divise** *a*

ⓘ Cela signifie qu'il existe un nombre entier positif k tel que $\boldsymbol{a = b \times k}$.

Exemples :

- La division euclidienne de 40 par 8 donne 5 comme quotient et 0 comme reste car :

$$40 = 5 \times 8$$

On dit que : 40 est un multiple de 8, ou encore que : 40 est divisible par 8
ou encore que : 8 divise 40 ou encore que : 8 est un diviseur de 40.

- Le nombre 12 a plusieurs diviseurs : 1 ; 2 ; **3 ; 4** ; 6 ; 12

- **Les diviseurs vont « deux par deux » : 1 et 12 2 et 6 3 et 4**
- **Mieux vaut les ranger dans l'ordre croissant pour ne pas en oublier !**
- **Le nombre 1 est un diviseur de tout nombre entier.**

- Le nombre 64 a plusieurs diviseurs : 1 ; 2 ; 4 ; **8** ; 16 ; 32 ; 64

On est au milieu de la liste des diviseurs lorsqu'on atteint
la racine carrée du nombre !
Ici $\sqrt{64} = 8$ et dans l'exemple précédent $\sqrt{12} = 3{,}464 \ldots$ (entre 3 et 4)

- Le nombre 17 a seulement deux diviseurs : 1 et 17.

☞ *Rappels : critères de divisibilité*

Il existe des méthodes simples et rapides pour reconnaître facilement si un nombre est divisible par 2 ; par 3 ; par 4 ; par 5 ; par 9 ou par 10.

- Un nombre **divisible par 2** est un **nombre pair** : il se termine par 0 ; 2 ; 4 ; 6 ou 8.
- Un nombre **divisible par 5** se termine **par 0 ou par 5.**
- Un nombre **divisible par 10** se termine **par 0**.

- Un nombre **divisible par 3** a la **somme de ses chiffres divisible par 3.**
- Un nombre **divisible par 9** a la **somme de ses chiffres divisible par 9.**

Exemples :

- Le nombre 5 172 est divisible par 3 mais pas par 9 car $5+1+7+2=15$ et 15 est divisible par 3 mais pas par 9.

- Le nombre 12 978 est divisible par 3 et par 9 car $1+2+9+7+8=27$ et 27 est divisible par 3 et par 9.

- Un nombre **divisible par 4** a **ses deux derniers chiffres** qui forment un nombre **divisible par 4**.

Exemples :

- Le nombre 736 est divisible par 4 car 36 est un multiple de 4.

- Le nombre 3 154 n'est pas divisible par 4 car 54 n'est pas un multiple de 4.

II – Nombres premiers et décomposition en produit de facteurs premiers

1) Définition

Un nombre entier positif qui admet **exactement deux diviseurs** (1 et lui-même) s'appelle un **nombre premier.**

Remarques :

Le nombre 1 admet un seul diviseur (lui-même), ce n'est donc pas un nombre premier !

Le **plus petit nombre premier est le nombre 2**.

Voici le début de la liste des nombres premiers dans l'ordre croissant :

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 etc …

2) *Décomposition en produit de facteurs premiers*

Exemples : Le nombre 15 se décompose en 3×5 où 3 et 5 sont des nombres premiers.
Le nombre 28 se décompose en $2 \times 2 \times 7$ où 2 et 7 sont des nombres premiers.

Propriété (admise) :

- Un nombre entier supérieur ou égal à 2 **se décompose en produit de facteurs premiers**.
- Cette décomposition est **unique** *(il en existe une seule pour chaque nombre).*

Exemple : **On veut décomposer le nombre 84 en produit de facteurs premiers.**
La décomposition est unique : il y a différentes manières de la trouver mais toutes les méthodes nous mèneront à la même décomposition finale.

1ère méthode : →

On cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant :
84 est divisible par 2 donc : $84 = 2 \times 42$
42 est encore divisible par 2 donc : $84 = 2 \times 2 \times 21$
21 est divisible par 3 donc : $\mathbf{84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7}$
Or 7 est un nombre premier donc la décomposition de 84 en produit de facteurs premiers est terminée.
On écrit cette décomposition : $\mathbf{84 = 2^2 \times 3 \times 7}$

On peut écrire ces étapes sous la forme d'un « **arbre** » :

$$84$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$\mathbf{2} \times 42$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$\mathbf{2} \times 21$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$\mathbf{3 \times 7}$$

La décomposition de 84 est donc : $\mathbf{2 \times 2 \times 3 \times 7}$

2ème méthode : ←

On écrit d'abord n'importe quel produit égal à 84 :
$84 = 4 \times 21$ par exemple, puis on décompose 4 et 21 en produits de facteurs premiers :
$\mathbf{84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7}$.

Voici l'**arbre** correspondant :

$$84$$
$$\swarrow \quad \searrow$$
$$4 \times 21$$
$$\swarrow \searrow \quad \swarrow \searrow$$
$$\mathbf{2 \times 2} \quad \mathbf{3 \times 7}$$

La décomposition de 84 est donc : $\mathbf{2 \times 2 \times 3 \times 7}$

Remarque importante pour les exercices !

$\mathbf{84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7}$ signifie que les nombres 2 ; 3 et 7 sont des diviseurs de 84.
Mais aussi $\mathbf{2 \times 2}$ et $\mathbf{2 \times 3}$ et $\mathbf{2 \times 7}$ et $\mathbf{2 \times 2 \times 3}$ et $\mathbf{2 \times 2 \times 7}$ et $\mathbf{2 \times 3 \times 7}$ et …. etc … sont aussi des diviseurs de 84.
Si on établit la liste des diviseurs de 84 grâce à sa décomposition en facteurs premiers, on aurait : $\mathbf{2 \times 2 = 4}$ $\mathbf{2 \times 3 = 6}$ $\mathbf{2 \times 7 = 14}$ $\mathbf{3 \times 7 = 21}$
$\mathbf{2 \times 2 \times 3 = 12}$ $\mathbf{2 \times 2 \times 7 = 28}$ $\mathbf{2 \times 3 \times 7 = 42}$ sans oublier **1 ; 84 ; 2 ; 3 et 7.**

III – Diviseurs communs et fractions irréductibles

1) *Définition*

Un **diviseur commun** à deux nombres *a* et *b* est un nombre entier
qui divise à la fois *a* et *b*.

Exemple : Pour connaître les diviseurs communs à 84 et à 30, on a deux méthodes :

➢ ***Méthode 1 :***
On écrit *la liste des diviseurs* de 84 et *la liste des diviseurs* de 30, et on regarde quels sont les diviseurs communs aux deux listes :

Les diviseurs de 84 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84.

Les diviseurs de 30 sont 1 ; 2 ; 3 ; 5 ; 6 ; 10 ; 15 ; 30.

Les **diviseurs communs** à 84 et à 30 sont donc 1 ; 2 ; 3 ; 6 : ils apparaissent dans les deux listes.
Le plus grand diviseur commun est 6.

➢ ***Méthode 2 (plus rapide !) :***
On utilise *les décompositions en facteurs premiers* de 84 et 30 et on regarde quels sont les facteurs communs aux deux décompositions :

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7} \\ \mathbf{30 = 2 \times 3 \times 5} \end{array}\right\}$$

On voit **2 et 3 en commun** : donc 2 ; 3 et 2×3 sont des diviseurs communs à 84 et 30.

Le plus grand diviseur commun est $2 \times 3 = 6$.

2) *Fractions irréductibles*

Définition : Une **fraction est dite irréductible** lorsque le **numérateur et le dénominateur n'ont pas de diviseur commun autre que 1.**

➢ Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par **le plus grand diviseur commun aux deux nombres**.

Exemple : Pour **rendre irréductible** la fraction $\frac{84}{30}$, on cherche **le plus grand diviseur commun aux deux nombres**.
Pour cela, on décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers puis on simplifie par tous les facteurs communs aux deux nombres :

$$\frac{84}{30} = \frac{\cancel{\mathbf{2}} \times 2 \times \cancel{\mathbf{3}} \times 7}{\cancel{\mathbf{2}} \times \cancel{\mathbf{3}} \times 5} = \frac{2 \times 7}{5} = \frac{14}{5}$$

On voit **2 et 3 en commun** : on peut les « barrer »
(cela revient à diviser par 2 et par 3 le numérateur et le dénominateur).
Il nous reste donc 2×7 au numérateur et 5 au dénominateur.

Notion de fonction

I - Qu'est-ce qu'une fonction ?

Une **fonction** est un outil mathématique qui, à un nombre, <u>fait correspondre</u> un nombre, unique.

Nombre initial : « antécédent » → **FONCTION** → ***Nombre correspondant : « image »***

*Une fonction est comme une « machine » qui transforme un nombre de départ, « **la variable** », appelé aussi « nombre initial ou **antécédent** » en un nombre d'arrivée appelé « nombre correspondant ou **image** ».*

<u>Exemple :</u> L'outil mathématique qui, à un nombre, fait correspondre **son carré,** est une fonction :

4 → **FONCTION « carré »** → **16**

II - Vocabulaire et notations

<u>Exemple :</u> **On va appeler f la fonction qui, à un nombre, fait correspondre son carré.**
Si le nombre initial est x, le nombre correspondant est x^2.
On dit que la fonction f est **la fonction** qui, à un nombre x, « **associe »** le nombre x^2.

1ère notation possible : $f(x) = x^2$ **$f(x)$ se lit « f de x »**
2ème notation possible : $f : x \longmapsto x^2$

nombre initial : « antécédent » (pour x) — **nombre correspondant : « image »** (pour x^2)

Si le nombre initial est 4, le nombre correspondant est 16 (car $4^2 = 16$)

On peut noter $\boldsymbol{f(4) = 16}$ ou $\boldsymbol{f : 4 \longmapsto 16}$

$f(4)$ se lit « f de 4 »

On dit que :

- 16 est **l'<u>image</u>** de 4 par la fonction f car $f(4) = 4^2 = 16$
- 4 est **un <u>antécédent</u>** de 16 par la fonction f
  – 4 est **aussi un antécédent** de 16 car $f(-4) = (-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$
  Le nombre 16 a deux antécédents : 4 et – 4.

De la même manière, on peut calculer l'image de 3, l'image de – 5 et l'image de 0 :

$f(3) = 3^2$ $= 9$	$f(-5) = (-5)^2$ $= 25$	$f(0) = 0^2$ $= 0$
L'image de 3 est 9.	**L'image de –5 est 25.**	**L'image de 0 est 0.**
3 est un antécédent de 9.	**–5 est un antécédent de 25.**	**0 est un antécédent de 0.**

On peut placer tous ces résultats dans un **« tableau de valeurs »** :

- 4 et 4 sont des **antécédents** de 16 par la fonction f.

ligne des antécédents → $\boldsymbol{x}$	-5	-4	0	3	4
ligne des images → $\boldsymbol{f(x)}$	25	16	0	9	16

25 est **l'image** de - 5 par la fonction f.

De manière générale, l'écriture $\boldsymbol{f(x)}$**,** désigne **l'image de $\boldsymbol{x}$** par la fonction **$\boldsymbol{f}$**.

On peut noter : $\boldsymbol{f : x \longmapsto f(x)}$

nombre initial : **antécédent**

nombre correspondant : **image**

III - Représentation graphique d'une fonction

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction f, on choisit des nombres au hasard, appelés x, et on calcule leur image par la fonction f, notés $\boldsymbol{f(x)}$ ou $\boldsymbol{y}$ sur le graphique.
On place **tous les points** de coordonnées ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{f(x)}$) dans un repère puis on relie ces points à l'aide d'une courbe.
Cette courbe est **la représentation graphique** de la fonction f.

Dans un repère, **la représentation graphique** de la fonction f est l'ensemble **de tous les points de coordonnées** ($\boldsymbol{x}$; $\boldsymbol{f(x)}$), où $\boldsymbol{x}$ désigne un nombre.

abscisse : axe des $\boldsymbol{x}$

ordonnée : axe des $\boldsymbol{y}$

Remarque :

- **Sur l'axe des abscisses**, on place les nombres x : ce sont les **antécédents.**
- **Sur l'axe des ordonnées**, on place les nombres $f(x)$: ce sont les **images.**

Exemple :

On va tracer la représentation graphique de la fonction $\boldsymbol{f}$ définie par $\boldsymbol{f : x \longmapsto x^2}$.
Pour cela, on réutilise le tableau de valeurs précédent :

ligne des antécédents → $\boldsymbol{x}$	-5	-4	0	3	4
ligne des images → $\boldsymbol{f(x)}$ **ou** $\boldsymbol{y}$	25	16	0	9	16

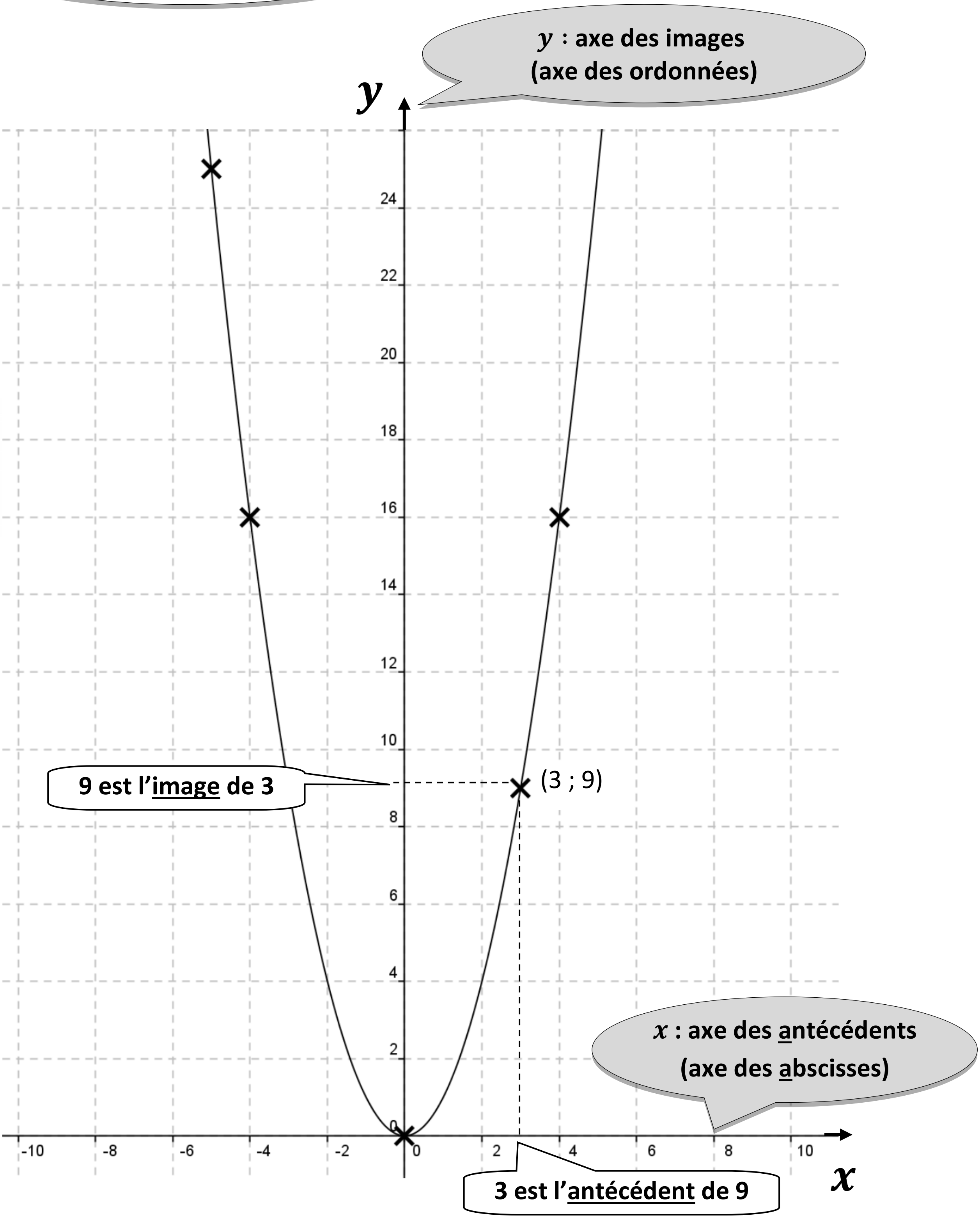
La **première colonne** de nombres donne le **premier point** à placer dans le repère : **(-5 ; 25)**

Les cinq colonnes de nombres de ce tableau donnent <u>cinq points à placer</u> dans le repère.
Les cinq points sont de **coordonnées** :

–5 est **l'antécédent** : ce sera **<u>l'abscisse du point</u>**

(–5 ; 25)   (– 4 ; 16)   (0 ; 0)   (3 ; 9)   (4 ; 16)

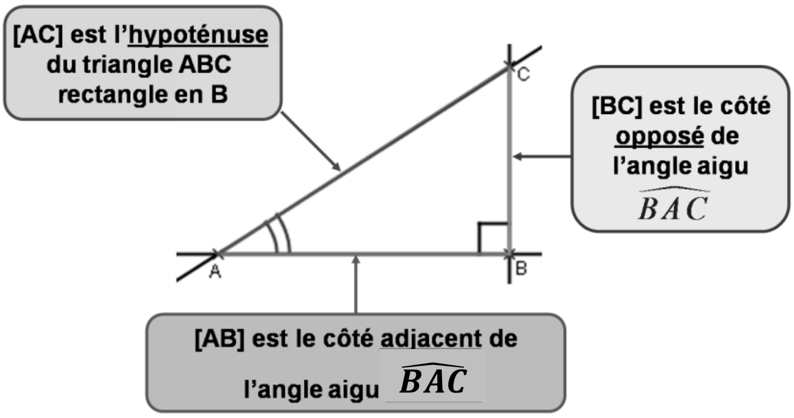
25 est **l'image** : ce sera **<u>l'ordonnée du point</u>**



Trigonométrie

La trigonométrie permet d'établir des relations entre les mesures d'angles et les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

I - Vocabulaire



Soit ABC un triangle rectangle en B.
Le côté [AC] s'appelle **l'hypoténuse** du triangle ABC.

Pour l'angle $\widehat{BAC}$:

• on dit que [AB] est son **côté adjacent** : c'est le côté qui **touche** l'angle $\widehat{BAC}$ mais qui n'est pas l'hypoténuse.

• on dit que [BC] est son **côté opposé** : c'est le côté qui est **en face** de l'angle $\widehat{BAC}$.

Si on s'intéresse à un autre angle, les côtés opposé et adjacent ne sont plus les mêmes : Pour l'angle $\widehat{ACB}$, [BC] serait son **côté adjacent**
et [AB] serait son **côté opposé.**

II - Les formules de trigonométrie

Pour un triangle ABC rectangle en B :

- **cosinus** de l'angle $\hat{A}$: $\dfrac{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \dfrac{AB}{AC}$
- **sinus** de l'angle $\hat{A}$: $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \dfrac{BC}{AC}$
- **tangente** de l'angle $\hat{A}$: $\dfrac{\text{longueur du côté opposé à l'angle } \hat{A}}{\text{longueur du côté adjacent à l'angle } \hat{A}} = \dfrac{BC}{AB}$

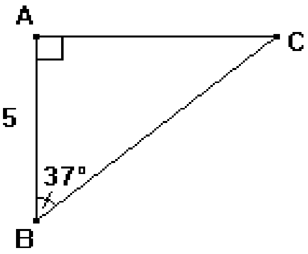
Remarques :

- On ne peut utiliser ces formules que dans les **triangles rectangles**.
- **Le cosinus et le sinus sont deux nombres compris entre 0 et 1, par contre, la tangente peut être n'importe quel nombre positif** (de 0 à l'infini).
- Ces trois nombres n'ont **pas d'unité**.
- Un moyen mnémotechnique pour se souvenir des formules :
  « SOH CAH TOA » ou « CAH SOH TOA » !

III - Utilisations

Avant d'utiliser une calculatrice pour faire de la trigonométrie, il faut toujours vérifier qu'elle est en **mode "degré" (le symbole "D" ou "DEG" doit être écrit sur l'écran) !**

Pour calculer une longueur :



Exemple : *Soit ABC un triangle rectangle en A.*
On donne AB = 5 cm et $\widehat{B}$ = 37 °. ***Calculer BC****.*

<u>Méthode</u> : 1 - On regarde <u>quel est l'angle que l'on connaît</u> : c'est $\widehat{B}$.

2 - <u>Quel est le côté que l'on connaît</u> ? C'est le côté [AB], il touche l'angle $\widehat{B}$ mais ce n'est pas l'hypoténuse, c'est donc le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{B}$.

3 - <u>Quel est le côté que l'on cherche</u> ? C'est **l'hypoténuse.**

☞ Il faut donc utiliser une formule ayant à la fois **côté adjacent et hypoténuse** : il n'y en a qu'une seule, c'est la formule du **cosinus !**

<u>Rédaction de la réponse :</u>

On sait que le triangle ABC est rectangle en A.
On utilise la trigonométrie :

$\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ On remplace par les nombres connus.

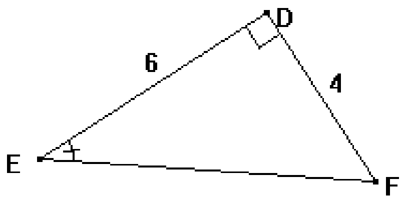
On utilise le produit en croix avec $\cos 37 = \dfrac{\cos 37}{1}$

$\cos 37 = \dfrac{5}{BC}$

$BC = \dfrac{5}{\cos 37}$

$BC \approx 6{,}3$ cm

Le segment [BC] mesure environ 6



Pour calculer la mesure d'un angle :

Exemple : *Soit DEF un triangle rectangle en D.*
On donne DE = 6 cm et DF = 4 cm. ***Calculer la mesure de l'angle $\widehat{E}$****.*

<u>Méthode</u> : 1 - <u>On regarde quel est l'angle que l'on cherche</u> : c'est l'angle $\widehat{E}$.

2 - <u>Quels sont les côtés que l'on connaît</u> ?

On connaît le côté [ED] qui touche l'angle $\widehat{E}$ mais qui n'est pas l'hypoténuse : c'est le **côté adjacent** à l'angle $\widehat{E}$.

Et on connaît aussi le côté [DF] qui en face de l'angle $\widehat{E}$: c'est le **côté opposé** à l'angle $\widehat{E}$.

☞ Il faut donc utiliser une formule ayant à la fois **côté adjacent et côté opposé** : il n'y en a qu'une seule, c'est la formule de la **tangente !**

<u>Rédaction de la réponse :</u>

On sait que le triangle DEF est rectangle en D.
On utilise la trigonométrie :

$\tan \widehat{E} = \dfrac{DF}{DE}$ On remplace par les nombres connus.

On utilise la touche Arctan ou Atn ou Tan^{-1} de la calculatrice.

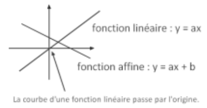
$\tan \widehat{E} = \dfrac{4}{6}$

$\widehat{E} = \arctan\left(\dfrac{4}{6}\right)$

$\widehat{E} \approx 34$ ° **L'angle $\widehat{E}$ mesure environ 34°.**

Leçon 7

Fonctions linéaires et fonctions affines



I – Définitions et méthodes

• Une **fonction linéaire** est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $\boldsymbol{ax}$ où a est un nombre relatif fixé.

Une fonction linéaire est de la forme : $\boldsymbol{x \longmapsto ax}$

• Une **fonction affine** est une fonction qui, à un nombre x, associe le nombre $\boldsymbol{ax+b}$ où a et b sont deux nombres relatifs fixés.

Une fonction affine est de la forme : $\boldsymbol{x \longmapsto ax+b}$**.**

*Si $b=0$, la fonction est une **fonction linéaire**.*

*Si $a=0$, la fonction est une **fonction constante** de la forme $f: x \longmapsto b$.*

◆ Pour **calculer l'image** d'un nombre, **on remplace x par le nombre.**

Exemple 1 : **Soit *f* la fonction définie par $\boldsymbol{f(x) = -8x}$.**

La fonction f est une fonction ***linéaire*** de la forme $x \longmapsto ax$ avec $a = -8$.

a) **Calculer l'image de 5 par la fonction *f*.**

Pour calculer l'image de 5 par la fonction f, **on remplace** x par 5 dans l'expression $f(x) = -8x$: $f(5) = -8 \times 5 = -40$. **L'image de 5 est $\boldsymbol{-40}$.**

b) **Trouver un antécédent de 46 par la fonction *f*.**

On cherche le nombre dont l'image est 46 par la fonction f : on cherche x pour que – $8x$ soit égal à 46. **On résout l'équation :**

$$-8x = 46$$

$$x = \frac{46}{-8} = -5{,}75$$

L'antécédent de 46 est -5,75.

Exemple 2 : **Soit *g* la fonction définie par $\boldsymbol{g(x) = 3x - 4}$.**

La fonction g est une fonction ***affine*** de la forme $x \longmapsto ax + b$ avec $a = 3$ et $b = -4$.

a) **Calculer l'image de -9 par la fonction *g*.**

Pour calculer l'image de -9 par la fonction g, **on remplace** x par -9 dans l'expression $g(x) = 3x - 4$. $g(-9) = 3 \times (-9) - 4 = -27 - 4 = -31$.

L'image de $\boldsymbol{-9}$ est – $\boldsymbol{31}$.

b) **Trouver un antécédent de $\boldsymbol{-10}$ par la fonction *g*.**

On cherche le nombre dont l'image est -10 par la fonction g : on cherche x pour que $3x - 4$ soit égal à -10. **On résout l'équation :**

$$3x - 4 = -10$$

$$3x = -6$$

$$x = \frac{-6}{3} = -2$$

L'antécédent de -10 est -2.

II – Représentations graphiques

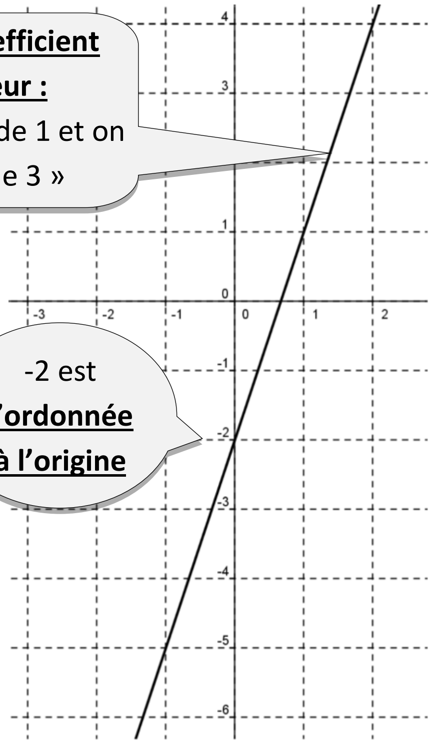
*Pour tracer la représentation graphique d'une fonction, on utilise un **tableau de valeurs**. On choisit des nombres « au hasard » pour les valeurs de x et on calcule les images de ces nombres.*

Exemple 1 : Tracer la représentation graphique de la fonction affine $f : x \longmapsto 3x - 2$

$\boldsymbol{x}$	- 1	0	1	2
$\boldsymbol{f(x)}$	-5	-2	1	4

-5 est **l'image de -1** car : $f(-1) = 3 \times (-1) - 2$
$= -5$

3 est **le coefficient directeur :** « on avance de 1 et on monte de 3 »



-2 est **l'ordonnée à l'origine**

Ce tableau donne les coordonnées de **quatre points** à placer dans le repère :

(-1 ; -5)   (0 ; -2)   (1 ; 1)   (2 ; 4)

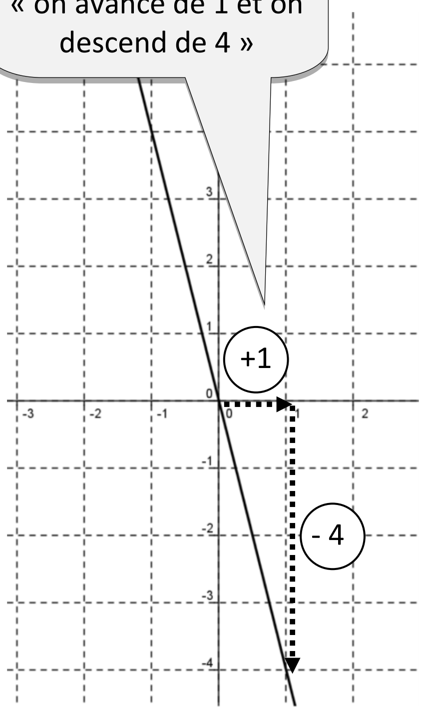
☞ On place ces points et on les relie avec une règle pour obtenir une droite : **les points sont alignés**.

Exemple 2 : On trace la représentation graphique de la fonction linéaire $g : x \longmapsto -4x$ avec un tableau de valeurs :

$\boldsymbol{x}$	- 1	0	1
$\boldsymbol{g(x)}$	4	0	- 4

$\times(-4)$

-4 est **le coefficient directeur :** « on avance de 1 et on descend de 4 »



Ce tableau est un tableau de **proportionnalité**.
Il donne les coordonnées de **trois points** à placer dans le repère : (-1 ; 4)   (0 ; 0)   (1 ; -4)

☞ On place ces points et on les relie avec une règle pour obtenir une droite : **les points sont alignés avec l'origine** du repère.

À SAVOIR :

Les fonctions affines et linéaires sont représentées graphiquement par **des droites**.

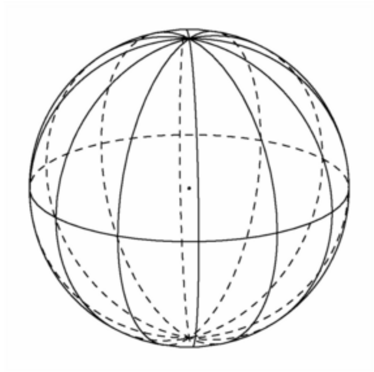
- Pour une **fonction affine** de la forme $\boldsymbol{x \longmapsto ax + b}$,
  $\boldsymbol{a}$ s'appelle le **coefficient directeur** de la droite
  $\boldsymbol{b}$ s'appelle **l'ordonnée à l'origine**
- Pour une **fonction linéaire** de la forme $\boldsymbol{x \longmapsto ax}$,
  $\boldsymbol{a}$ est le **coefficient directeur** de la droite

Une fonction linéaire est représentée par **une droite passant par l'origine du repère.**

Géométrie dans l'espace

I - Sphères et boules

1) Définitions



◆ **La <u>sphère</u>** de centre **O** et de rayon ***R*** est **l'ensemble des points** M de l'espace
tels que **OM = *R*.** *(c'est un objet « creux »)*

◆ **La <u>boule</u>** de centre **O** et de rayon ***R*** est **l'ensemble des points** M de l'espace
tels que **OM $\leq$ *R*.** *(c'est un objet « plein »)*

• **Un <u>diamètre</u>** de la sphère de centre O est un **segment de milieu O** et **d'extrémités deux points de la sphère**.

<u>Exemple :</u> Sur la sphère de centre O ci-contre, A et B sont deux points de la sphère et O est le milieu de [AB] :
[AB] est donc un diamètre de la sphère : AB = 2×AO

• **Un <u>grand cercle</u>** de la sphère est **un cercle de centre O et de rayon *R*.**

<u>Exemple :</u> Le cercle de centre O passant par A et par B est un grand cercle de la sphère ci-dessus.

2) Aire d'une sphère et volume d'une boule

◆ **L'aire d'une sphère** de rayon *R* est : $\boldsymbol{A_{sphère} = 4\pi R^2}$

◆ **Le volume d'une boule** de rayon *R* est : $\boldsymbol{V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3}$

<u>Exemples :</u>

Calculer l'aire d'une sphère de rayon 7 cm *(donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au cm²) :*

$A_{sphère} = 4\pi R^2$

$A_{sphère} = 4 \times \pi \times 7^2$

$A_{sphère} = 196\pi$ **valeur exacte**

$A_{sphère} = 615{,}752\ldots$

$A_{sphère} \approx 616$ cm²

L'aire de la sphère est environ 616 cm².

valeur arrondie au cm²

Calculer le volume d'une boule de rayon 5 cm *(donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mm³) :*

$V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_{boule} = \frac{4}{3} \times \pi \times 5^3$

$V_{boule} = \frac{500}{3} \times \pi$ **valeur exacte**

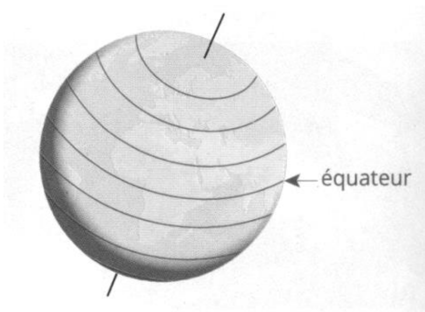
$V_{boule} = 523{,}598\ 77\ldots$

$V_{boule} \approx 523{,}599$ cm³ **valeur arrondie au mm³**

Le volume de la boule est environ 523,999 mm³.

II – Repérage sur une sphère

Définitions :

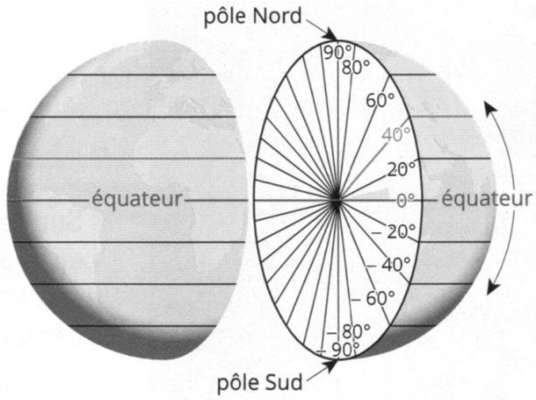


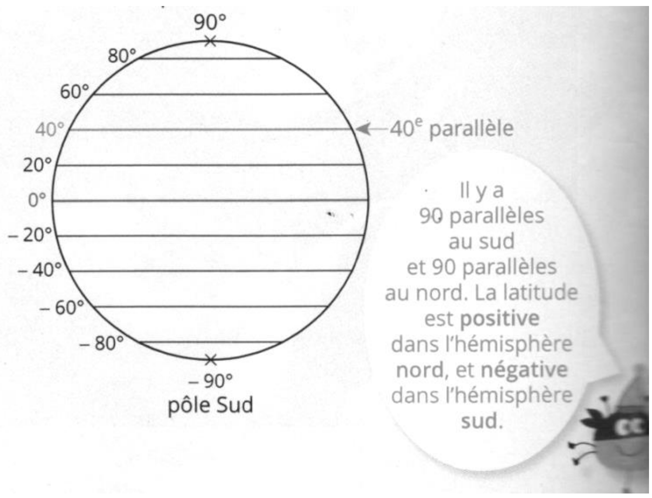
- Sur le globe terrestre, **les <u>parallèles</u>** sont des **cercles imaginaires** parallèles à l'équateur.

Ils sont répartis régulièrement entre l'équateur et les deux pôles.

- Un parallèle est identifié **par l'angle** qu'il forme avec **le centre** de la Terre et **l'équateur**.
- On appelle **<u>latitude</u>** d'un point **la mesure de l'angle** (en degré) du parallèle passant par ce point.

☞ La latitude est positive dans l'hémisphère nord et négative dans l'hémisphère sud.



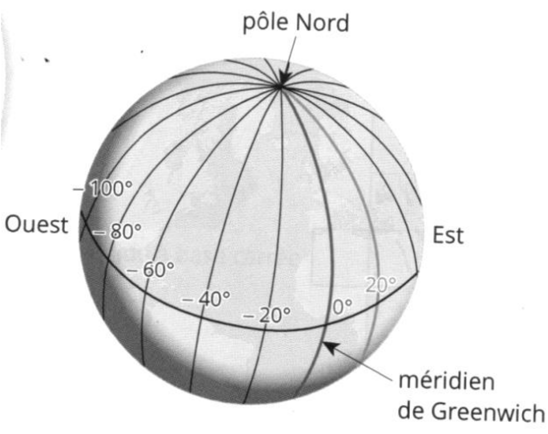


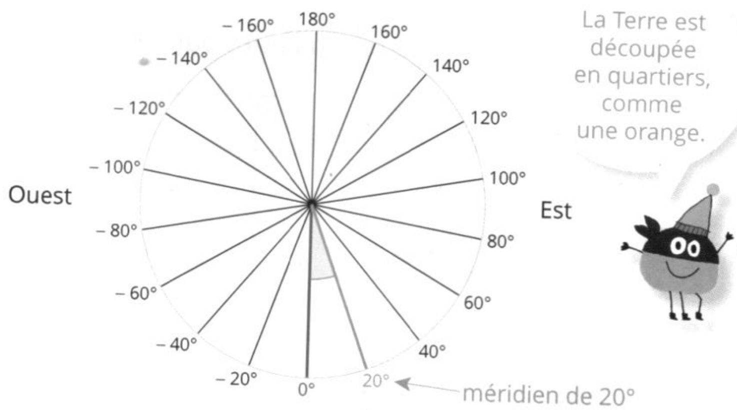
Définitions :

- Sur le globe terrestre, **les <u>méridiens</u>** sont des **demi-cercles imaginaires** joignant les deux pôles et séparant la Terre dans le sens Est-Ouest.

- Un méridien est identifié **par l'angle** qu'il forme avec **le centre** de la Terre et **le méridien de Greenwich, lorsque l'on regarde la Terre du dessus.**
- On appelle **<u>longitude</u>** d'un point la mesure de l'angle (en degré) du méridien passant par ce point.

☞ La longitude est positive à l'est et négative à l'ouest du méridien de Greenwich.



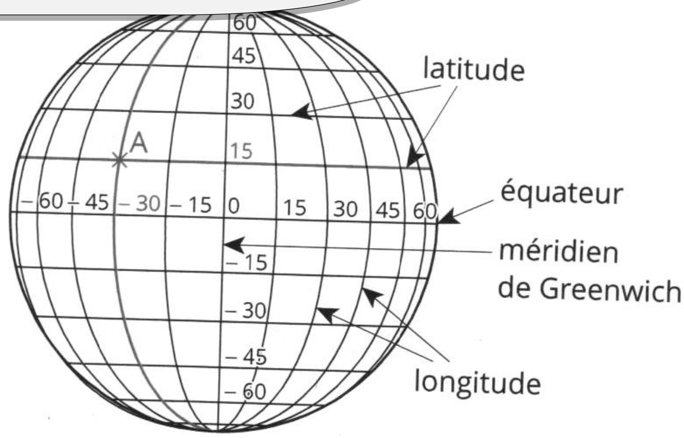


vue de dessus

Remarque :
Grâce aux parallèles et aux méridiens, une sphère (ou la Terre) est totalement quadrillée et on peut repérer n'importe quel point sur cette sphère.

Définition :
On appelle **coordonnées géographiques** d'un point d'une sphère le binôme de nombres (x ; y) où x **est la latitude** et y **la longitude du**

Exemple :
Le point A est sur le parallèle de latitude 15° et sur le méridien de longitude – 30°.
Les coordonnés géographiques du point A sont donc (15 ° ; - 30°).



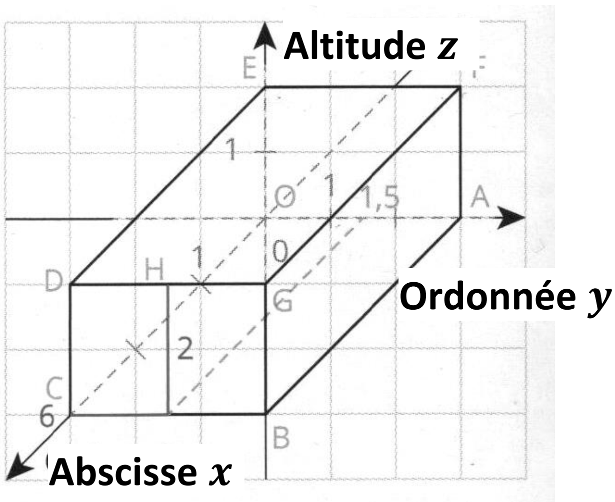
III – Repérage sur un pavé droit

Définition :

Pour se repérer dans un pavé droit, il faut munir l'espace d'un **repère**.
Pour cela, on prend un point O, appelé **origine** du repère et trois axes gradués perpendiculaires entre eux.
Les trois axes représentent **l'abscisse, l'ordonnée et l'altitude**.
À tout point M correspond un unique triplet de nombres (x ; y ; z) appelé coordonnées de M.
On note M (x ; y ; z).

abscisse **ordonnée** **altitude**

Exemple :
Le point H est le milieu de [DG].
Son abscisse est 6 ;
son ordonnée est 1,5 ;
et son altitude est 2.
Les coordonnées du point H sont donc (6 ; 1,5 ; 2).



IV – Section d'un solide par un plan

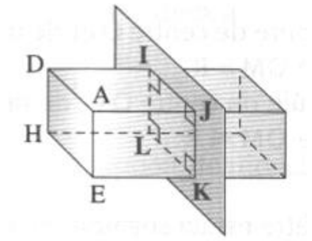
Définition :
Lorsqu'un solide est **coupé par un plan**, la surface obtenue s'appelle **la <u>section</u>** du solide par le plan ou **la <u>section plane</u>** du solide.

1) Sections d'un pavé droit, d'un cylindre par un plan

***Parallélépipède rectangle** (ou pavé droit) :*

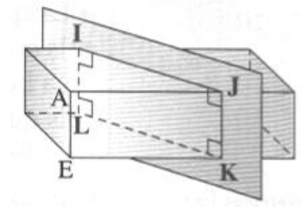
La section d'un parallélépipède rectangle par un **plan parallèle à une face** est **<u>un rectangle.</u>**

Plan parallèle à la face DAEH



La section d'un parallélépipède rectangle par un **plan parallèle à une arête** est **<u>un rectangle</u>**.

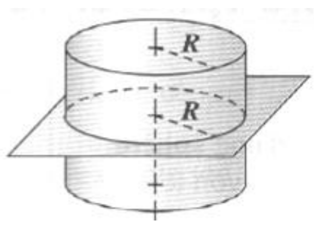
Plan parallèle à l'arête [AE]



Cylindre de révolution :

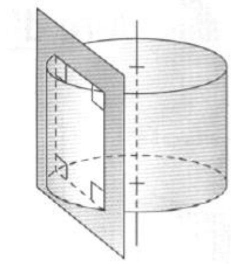
La section d'un cylindre de rayon *R* par un **plan parallèle à la base** est **<u>un cercle</u> dont le centre appartient à cet axe.**

Plan perpendiculaire à l'axe du cylindre



La section d'un cylindre par un **plan parallèle à son axe** est **<u>un rectangle</u>**.

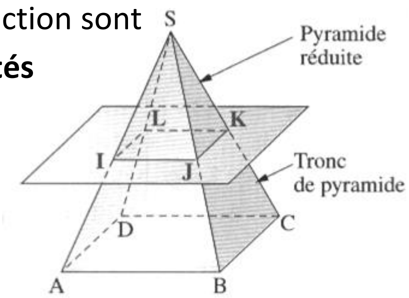
Plan parallèle à l'axe du cylindre



2) Sections d'une pyramide, d'un cône par un plan parallèle à la base

<u>Pyramide à base polygonale :</u>

La section d'une pyramide par un **plan parallèle à sa base** est un polygone de même nature que sa base :
c'est **une *<u>réduction</u>* de la base.**
Les côtés de la section sont **parallèles aux côtés** de la base.



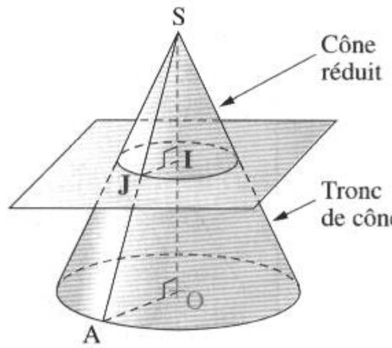
*Le **coefficient (ou rapport) de réduction** est*

$$\frac{\textit{petite longueur}}{\textit{grande longueur}} = \frac{SI}{SA} = \frac{SJ}{SB} = \frac{SK}{SC} = \cdots$$

<u>Cône de révolution :</u>

La section d'un cône de révolution par un **plan parallèle à sa base** est **un cercle :** c'est une ***réduction* de la base.**

(JI) // (AO)



*Le **coefficient (ou rapport) de réduction** est :*

$$\frac{\textit{petite longueur}}{\textit{grande longueur}} = \frac{SI}{SO} = \frac{SJ}{SA}$$

3) Section d’une sphère par un plan

Dans le cas général, la section d’une sphère par un **plan** est **un cercle.**

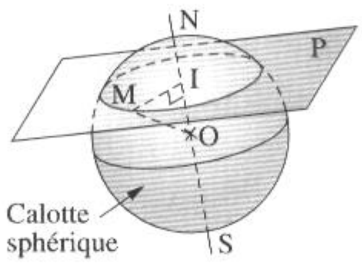
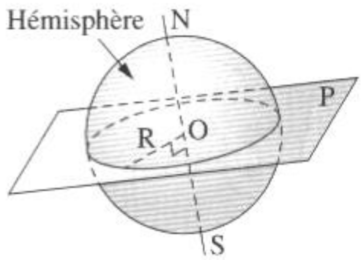
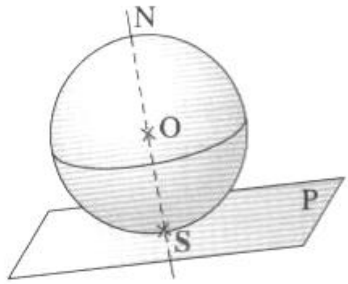
Différents cas :

Soient une sphère de centre O, de rayon *R*, et un plan P.

Sur chacune des figures ci-dessous, on appelle [NS] le diamètre de la sphère qui est perpendiculaire au plan P.

Le point du diamètre [NS] qui appartient au plan P s’appelle I.

On a alors les trois cas suivants :

si 0 **< OI <** *R*.	**si OI** = 0 (le point I est confondu avec le point O)	**si OI** = R (le point I est confondu avec le point S)
		
La section de la sphère et du plan P est **un cercle**. Pour tout point M de ce cercle, le triangle OIM est un **triangle rectangle en I.** On a OM = R. *Dans les exercices, on pourra donc calculer le rayon MI de ce cercle à l’aide du **théorème de Pythagore** ou de la **trigonométrie.***	La section de la sphère et du plan P est un **cercle de rayon R**. C’est **un grand cercle** de la sphère. La sphère est alors partagée en deux hémisphères.	La section de la sphère et du plan P est réduite à un seul point : le point S. On dit que **le plan P est tangent à la sphère.**

Remarque : Lorsque OI > R, le plan P ne coupe pas la sphère.

Notion de probabilité

I - Vocabulaire et définitions

En probabilité, le lancé d'une pièce de monnaie ou d'un dé, le tirage d'une carte dans un jeu de cartes, ou le tirage d'une boule dans une urne, etc…sont appelés des **expériences.**

Définitions :

- Chacun des **résultats possibles** d'une expérience est appelé **une <u>issue</u>.**
- Une expérience est dite **<u>aléatoire</u>** lorsque **l'on ne peut pas prévoir** avec certitude quel résultat se produira. Le résultat est déterminé par le **hasard.**

Exemples :

• Lorsqu'on lance **une pièce de monnaie** non truquée (on dit que la pièce est « **équilibrée »**) et que l'on regarde la face supérieure, l'expérience est aléatoire et il y a **2 issues possibles : pile et face.**

• Lorsqu'on lance un dé « équilibré » à 6 faces et que l'on regarde le nombre de points inscrits sur la face supérieure, l'expérience est aléatoire et il y a **6 issues possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6.**

Définitions :

- **Un <u>événement</u>** est une condition qui peut ou non, être réalisée lors de l'expérience.

Un événement peut être réalisé par **zéro, une ou plusieurs issues**.

- **Un <u>événement élémentaire</u>** est un événement réalisé par **une seule issue**.

Exemples :

On lance un dé à 6 faces et on regarde le nombre inscrit sur la face supérieure.

L'événement « *On obtient 4* » est un événement réalisé par une seule issue : 4.

L'événement « *On obtient un chiffre pair* » est réalisé par 3 issues : 2, 4 et 6.

II - Notion de probabilité

Propriété et notation :

Lorsqu'on effectue un très grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement se rapproche d'une « fréquence théorique » appelée **probabilité.**

Si on appelle A un événement, on note **p(A) la probabilité que l'événement A se réalise.**

L'écriture p(A) se lit « **p de A** ».

Exemples :

• Si on lance une pièce de monnaie équilibrée un très grand nombre de fois, on constate que la fréquence de l'événement ***« On obtient face »*** s'approche de $\frac{1}{2}$ (0,5 ou 50%). On dit que **la probabilité** de l'événement « *On obtient face* » est $\frac{1}{2}$.

Si on appelle F cet événement, on note **p(F) =** $\mathbf{\frac{1}{2}}$

• Si on lance un dé équilibré un très grand nombre de fois, on obtiendrait 4 environ 1 fois sur 6.
Si on appelle A l'événement élémentaire **« *On obtient 4* »,** la probabilité que l'événement A se réalise est $\frac{1}{6}$.   On note **p(A) =** $\mathbf{\frac{1}{6}}$

Propriétés :

- La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre **0 et 1.**
- La **somme** des probabilités de **tous** les **évènements élémentaires** d'une expérience aléatoire est égale à 1.

Définitions :

- Un évènement est **impossible** s'il ne peut pas se réaliser : **sa probabilité est égale à 0.**
- Un évènement est **certain** s'il se réalise à coup sûr : **sa probabilité est égale à 1.**
- **L'évènement contraire** d'un événement A est celui qui se réalise lorsque l'évènement A ne se réalise pas.   On le note **non A (ou $\overline{A}$).**

Si on note p(A) la probabilité de l'évènement A, alors **p (non A) = 1 – p (A).**

- **Deux évènements incompatibles** sont des évènements qui ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple : **On lance un dé équilibré à 6 faces, et on regarde le nombre inscrit sur la face supérieure.**

• Les six événements élémentaires sont ***« On obtient 1 » , « On obtient 2 » , « On obtient 3 », « On obtient 4 », « On obtient 5 » ,« On obtient 6 »*** .

Leur probabilité est chacune égale à $\frac{1}{6}$.

Si on calcule la somme de toutes ces probabilités, on a :

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{6}{6}=1$$

• L'événement « ***On obtient un 7*** » est un événement impossible : sa probabilité est 0.
• L'événement « ***On obtient un chiffre entre 1 et 6*** » est un événement certain : sa probabilité est 1.
• L'événement contraire de ***« On obtient un chiffre pair »*** est ***« On obtient un chiffre impair ».***
• Les événements ***« On obtient trois »*** et ***« On obtient un chiffre pair »*** *sont* ***incompatibles*** : ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Définition :

Lorsque tous les évènements **élémentaires** ont la **même probabilité** d'être réalisés, on dit qu'il s'agit d'une situation d'**équiprobabilité**.

Exemples : Lorsqu'on lance un dé équilibré à 6 faces, on a autant de chance d'obtenir 1, que 2, que 3 …. : il s'agit d'une situation d'équiprobabilité.
De même lorsqu'on lance une pièce de monnaie équilibrée.

Leçon 10

Statistiques

I – Effectifs et fréquences d'une série statistique

Définitions :

- Une **série statistique** est un ensemble de données ou valeurs, récoltées lors d'un sondage par exemple.
- **L'effectif d'une donnée** dans une série statistique est le **nombre de fois** où cette donnée apparaît.
- **L'effectif total** est le **nombre total de données** (ou valeurs) de la série.
- **La fréquence** d'une donnée est le **quotient de son effectif par l'effectif total** (résultat de la division). La fréquence est souvent donnée sous forme de pourcentage.

Exemple : *Une enquête a été réalisée auprès de 400 collégiens pour savoir le moyen qu'ils préfèrent utiliser pour communiquer avec leurs ami(es). Complète le tableau :*

	SMS	Instagram	Facebook	Snapchat	TOTAL
effectifs	8	206	57	129	400
fréquences (en %)	2	51,5	14,25	32,25	100

L'effectif total de cette série statistique est 400 : ce nombre correspond au nombre de collégiens interrogés.

II – Médiane d'une série statistique

Définition : La **médiane d'une série** de valeurs est un nombre qui partage cette série en « deux séries de même effectif ».

Pour déterminer la médiane, **on range** les valeurs de la série statistique **dans l'ordre croissant** ! **La médiane est alors le nombre M** tel que :

- au moins la moitié des valeurs de la série sont inférieures ou égales à M
- au moins la moitié des valeurs de la série sont supérieures ou égales à M

Exemple 1 : ***avec un effectif total impair :***

Voici les températures relevées à 8h du matin tous les jours d'une semaine :

9° 10° 8° 13° 12° 13° 14°

Quelle est la médiane de cette série de températures ?

On les range dans l'ordre croissant (écris deux nombres 13) et souligne la valeur qui est au milieu de la liste : 8° / 9° / 10° / **12°** / 13° / 13° / 14°

L'effectif total est 7 (il y a 7 nombres dans la liste) et la moitié de 7 est 3,5. On arrondit à la valeur entière supérieure, donc 4.

La médiane est un nombre qui partage la série en deux séries **de même effectif** : donc ici deux séries de 4 valeurs. **La médiane est la 4ème valeur de la série (c'est la valeur centrale de la série) : c'est-à-dire** 12°.

La valeur 12° partage cette série de températures en deux séries de même effectif : 4 températures sont inférieures ou égales à 12° et 4 sont supérieures ou égales à 12°.

Exemple 2 : ***avec un effectif total pair :***

Voici les températures relevées à 8h du matin le premier jour de chaque mois d'une année :

-2° 1° 3° 8° 12° 12° 16° 18° 16° 10° 5° -1°

Quelle est la médiane de cette série de températures ?

On les range dans l'ordre croissant et entoure en rouge les deux valeurs situées au milieu liste : -2° / -1° / 1° / 3° / 5° / 8° / 10° / 12° / 12° / 16° / 16° / 18°

L'effectif total est 12 (il y a 12 nombres dans la liste) et la moitié de 12 est 6 : c'est un nombre entier ! La médiane est un nombre qui partage la série en deux séries **de même effectif**, donc ici deux séries de 6 valeurs.

La médiane peut donc être n'importe quel nombre compris entre la 6è et la 7è valeur. Donc ici, n'importe quel nombres entre 8° et 10° : en général, on choisit la moitié de la somme de ces deux nombres : $\frac{8+10}{2} = 9$.

La valeur 9° partage cette série en deux séries de même effectif : 6 températures sont inférieures ou égales à 9° et 6 températures sont supérieures ou égales à 9°.

III - Moyenne et étendue d'une série statistique

Définitions : ◆ Pour calculer **la moyenne** des valeurs d'une série :

- on **ajoute** toutes les valeurs de la série
- puis on **divise cette somme par l'effectif total** de la série**.**

◆ Pour calculer **l'étendue** d'une série statistique, on calcule la **différence entre la plus petite et la plus grande** valeur de la série. Ces deux valeurs s'appellent **les valeurs extrêmes** de la série.

Exemple 1 : **Voici les prix observés dans plusieurs cinémas de la région pour une place de cinéma : 6 € 9,50 € 7,60 € 10 € 9,90 € 8,50 € 10,50 €**

◆ Quel est **l'effectif total** de cette série statistique ? 7

◆ Quel est le **prix moyen** d'une place de cinéma dans la région ?

(6 + 9,50 + 7,60 + 10 + 9,90) ÷ 5 = 8,6. Le prix moyen d'une place de cinéma dans la région est donc de 8,60 euros.

◆ Quelle est **l'étendue** des prix ? 10,50 – 6 = 4,50. L'étendue est donc de 4,50.

◆ Quelle est **le prix médian** ? *On les place dans l'ordre croissant.*

6 / 7,60 / 8,50 / 9,50 / 9,90 / 10 / 10,50. Il y a 7 valeurs. O prend donc la 4ème qui partage l'effectif en deux soit 9,50. Le prix médian est donc de 9,50 euros.

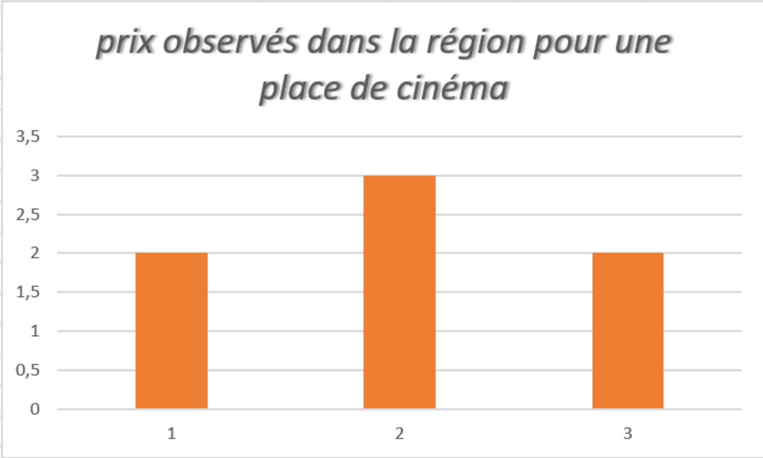
◆ On va regrouper les prix en « classes de prix » dans le tableau suivant :

La classe de prix $[6\,;\,8[$ regroupe les prix situés entre 6 € inclus et 8 € exclu.

classes de prix	$[6\,;\,8[$	$[8\,;\,10[$	$[10\,;\,12[$
effectifs	2	3	2

Il y a 2 prix situés entre 6 € inclus et 8 € exclu.

- On va construire l'histogramme représentant ces classes de prix :



Exemple 2 :

Voici le relevé des températures relevées à Tokyo à midi pour les jours du mois de mars :

Température (en °C)	**- 6**	**- 3**	**- 1**	**1**	**2**	**4**	**6**	**8**	**10**
Nombre de jours	**3**	**5**	**7**	**1**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**

- Les nombres -6 et 3 de la première colonne signifient qu'il y a eu 3 jours à -6 °C.
- Quel est **l'effectif total** de cette série statistique ? 31

  ☞ *Ce nombre correspond au nombre de jours du mois de mars*.
- Quel est **la température moyenne** de ce mois de mars ?

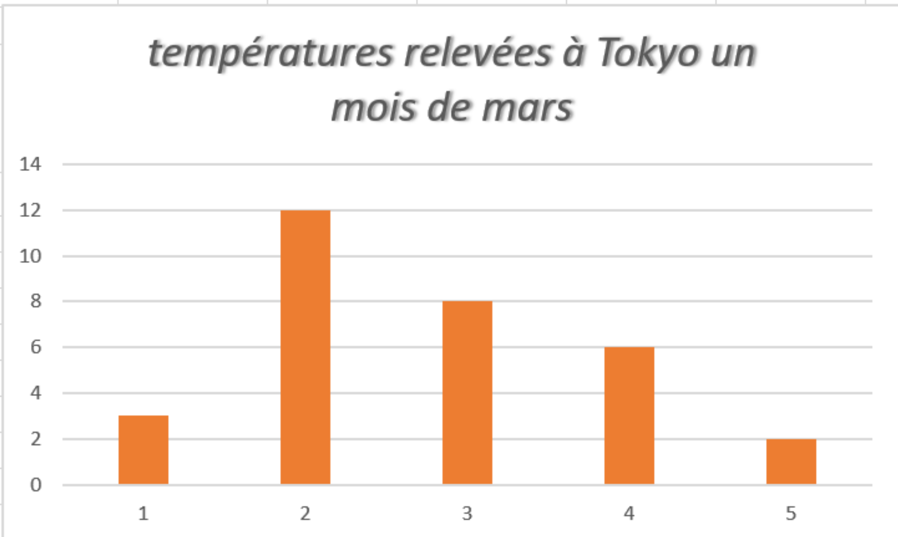
(3 x -6 + 5 x -3 + 7 x -1 + 1 x 1 + 3 x 2 + 4 x 4 + 5 x 6 + 1 x 8 + 2 x 10) ÷ 31 ≈ 1,32.
- Quelle est l'**étendue** des températures ? *10 – (-6) = 16.*
- Quelle est la **température médiane** de ce mois de mars ? *Il y a 31 valeurs.*

On prend donc la 16ème valeur car il y a 15 valeurs en-dessous et 15 au-dessus. Il s'agit donc de 1°C.
- On va **regrouper les températures en « classes** » dans le tableau suivant :

La classe $[-10\,;-5[$ ***regroupe les températures situées entre -10° inclus et -5° exclu.***

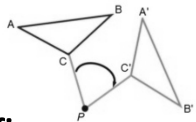
classes de températures	$[-10\,;-5[$	$[-5\,;\,0[$	$[0\,;\,5[$	$[5\,;\,10[$	$[10\,;\,15[$
effectifs	3	12	8	6	2

- On va construire l'**histogramme** représentant ces classes de températures :



Leçon 11

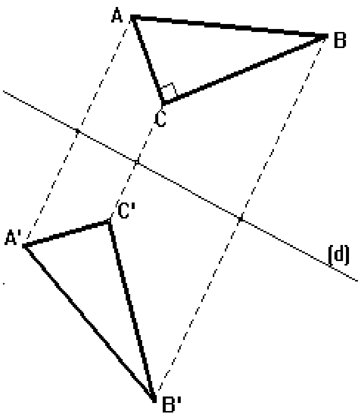
Transformations du plan



<u>Une transformation</u> est un procédé qui, à **une figure, fait correspondre une autre figure**, appelée **<u>son image</u>**.

<u>I - Transformations déjà étudiées</u>

1) <u>La symétrie axiale</u>



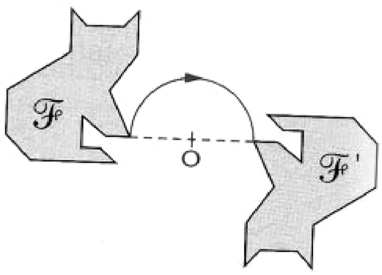
- Deux figures sont **<u>symétriques</u>** <u>par rapport à</u> **<u>un axe</u>** si elles se superposent **lorsqu'on plie le long de cet axe**.
- Cette transformation géométrique conserve les mesures de la figure initiale.

Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la symétrie d'axe (d).

<u>Construction :</u>
- Avec l'équerre et la règle graduée
- Au compas

2) <u>La symétrie centrale</u>

- Deux figures sont **<u>symétriques</u>** <u>par rapport</u> **<u>à un point</u>** si elles se superposent après **un demi-tour** autour de ce point, appelé **le centre de la symétrie.**
- Cette transformation géométrique conserve les mesures de la figure initiale.



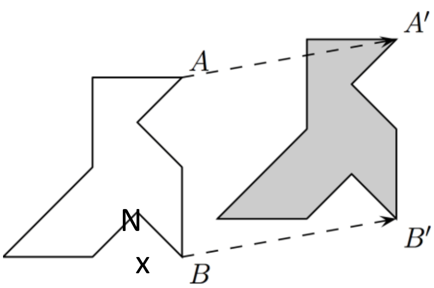
Sur la figure ci-contre, la figure F' est l'image de F par la **symétrie de centre O**.

<u>Construction :</u>
- Avec la règle graduée
- Avec la règle et le compas

<u>II - De nouvelles transformations</u>

1) <u>La translation</u>

- **Une <u>translation</u>** est le déplacement ou le **glissement** d'une figure dans une **direction** donnée, un **sens** donné et une **longueur** donnée.
- Cette transformation géométrique conserve les mesures et l'orientation de la figure de départ.



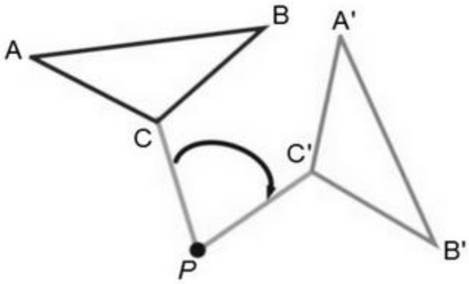
Sur la figure ci-contre, la figure grise est l'image de la figure blanche par la translation qui transforme A en A', ou B en B'.

<u>Construction :</u>

- Au compas : le point A' étant donné, on construit B' tel que AA'B'B soit un parallélogramme.

2) La rotation

- **Une <u>rotation</u>** est le **déplacement circulaire** d'une figure selon un **sens et un angle** donnés, **autour d'un point** (appelé **centre de rotation**).
- Cette transformation géométrique conserve les mesures de la figure initiale.



Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la rotation de centre P et d'angle $\widehat{CPC'}$.

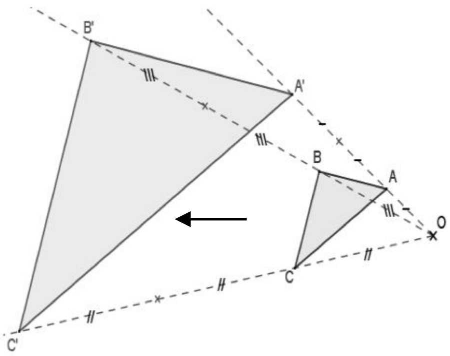
<u>Construction :</u>

➢ Avec un rapporteur et un compas.

3) L'homothétie

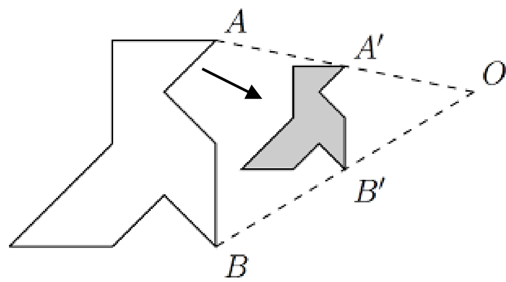
- **Une <u>homothétie</u>** est une transformation géométrique **qui agrandit ou qui réduit** une figure tout en conservant sa forme initiale.
- Elle est définie par un **centre et un rapport** : quand le rapport **est supérieur à 1,** c'est **un agrandissement** et quand le rapport **est inférieur à 1,** c'est **une réduction.**
- Si le **rapport** de l'homothétie est le nombre $\boldsymbol{k}$, alors :

les **longueurs** sont multipliées par $\boldsymbol{k}$, **les aires par $\boldsymbol{k}^2$ et les volumes par $\boldsymbol{k}^3$.**



Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par l'homothétie de centre O et de **rapport 3 :** les dimensions du grand triangle sont **3 fois plus grandes** que celles du petit.
L'aire de la grande figure est **9 fois plus grande** que l'aire de la petite (car $3^2 = 9$).

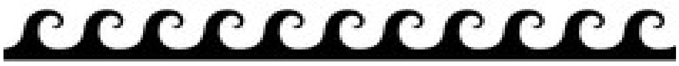
Sur la figure ci-contre, la petite cocotte en papier est l'image de la grande par l'homothétie de centre O et de **rapport** $\frac{1}{2}$: les longueurs sont divisées par 2, l'aire est divisée par 4 car $2^2 = 4$.



<u>Construction :</u> ➢ Avec une règle et un compas.

<u>III – Frises et pavages</u>

- **Une <u>frise</u>** est une <u>bande de plan</u> dans laquelle un motif **se répète régulièrement**.
- **Un <u>pavage</u>** est une <u>portion de plan</u> dans laquelle un motif **se répète régulièrement**.

<u>Exemples :</u> • Voici une frise : 

Chaque vague est l'image par translation de celle qui précède.

• Sur le pavage ci-contre, le même motif se répète en blanc, gris, ou noir. Plusieurs transformations sont utilisées : rotation, symétrie axiale et translation.

Œuvre de Maurits Cornelis Escher