Livret de Leçons

Mathématiques

Nom et prénom :..

Les tables de multiplication

1	2	3	4
1 × 1 = 1	**2** × 1 = 2	**3** × 1 = 3	**4** × 1 = 4
1 × 2 = 2	**2** × 2 = 4	**3** × 2 = 6	**4** × 2 = 8
1 × 3 = 3	**2** × 3 = 6	**3** × 3 = 9	**4** × 3 = 12
1 × 4 = 4	**2** × 4 = 8	**3** × 4 = 12	**4** × 4 = 16
1 × 5 = 5	**2** × 5 = 10	**3** × 5 = 15	**4** × 5 = 20
1 × 6 = 6	**2** × 6 = 12	**3** × 6 = 18	**4** × 6 = 24
1 × 7 = 7	**2** × 7 = 14	**3** × 7 = 21	**4** × 7 = 28
1 × 8 = 8	**2** × 8 = 16	**3** × 8 = 24	**4** × 8 = 32
1 × 9 = 9	**2** × 9 = 18	**3** × 9 = 27	**4** × 9 = 36
1 × 10 = 10	**2** × 10 = 20	**3** × 10 = 30	**4** × 10 = 40

5	6	7	8
5 × 1 = 5	**6** × 1 = 6	**7** × 1 = 7	**8** × 1 = 8
5 × 2 = 10	**6** × 2 = 12	**7** × 2 = 14	**8** × 2 = 16
5 × 3 = 15	**6** × 3 = 18	**7** × 3 = 21	**8** × 3 = 24
5 × 4 = 20	**6** × 4 = 24	**7** × 4 = 28	**8** × 4 = 32
5 × 5 = 25	**6** × 5 = 30	**7** × 5 = 35	**8** × 5 = 40
5 × 6 = 30	**6** × 6 = 36	**7** × 6 = 42	**8** × 6 = 48
5 × 7 = 35	**6** × 7 = 42	**7** × 7 = 49	**8** × 7 = 56
5 × 8 = 40	**6** × 8 = 48	**7** × 8 = 56	**8** × 8 = 64
5 × 9 = 45	**6** × 9 = 54	**7** × 9 = 63	**8** × 9 = 72
5 × 10 = 50	**6** × 10 = 60	**7** × 10 = 70	**8** × 10 = 80

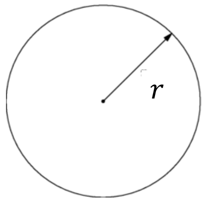
9	10	11	12
9 × 1 = 9	**10** × 1 = 10	**11** × 1 = 11	**12** × 1 = 12
9 × 2 = 18	**10** × 2 = 20	**11** × 2 = 22	**12** × 2 = 24
9 × 3 = 27	**10** × 3 = 30	**11** × 3 = 33	**12** × 3 = 36
9 × 4 = 36	**10** × 4 = 40	**11** × 4 = 44	**12** × 4 = 48
9 × 5 = 45	**10** × 5 = 50	**11** × 5 = 55	**12** × 5 = 60
9 × 6 = 54	**10** × 6 = 60	**11** × 6 = 66	**12** × 6 = 72
9 × 7 = 63	**10** × 7 = 70	**11** × 7 = 77	**12** × 7 = 84
9 × 8 = 72	**10** × 8 = 80	**11** × 8 = 88	**12** × 8 = 96
9 × 9 = 81	**10** × 9 = 90	**11** × 9 = 99	**12** × 9 = 108
9 × 10 = 90	**10** × 10 = 100	**11** × 10 = 110	**12** × 10 = 120
		11 × 11 = 121	**12** × 11 = 132
			12 × 12 = 144

Formulaire : périmètres, aires et volumes

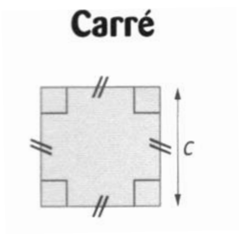
Périmètre d'un disque

La seule formule de périmètre qu'il faut apprendre est celle du disque :

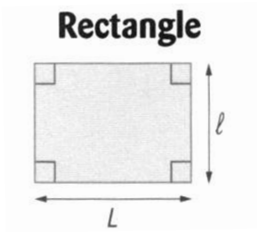
$$\mathcal{P}_{disque} = 2 \times r \times \pi \;\; ou \; 2\,\pi\, r$$



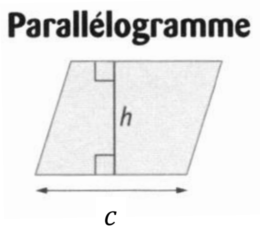
Aires des figures planes



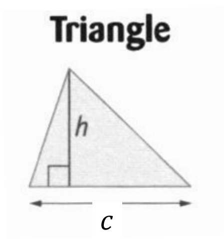
$\mathcal{A} = c \times c$
$= c^2$



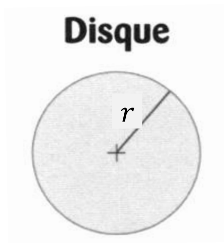
$\mathcal{A} = L \times l$



$\mathcal{A} = c \times h$

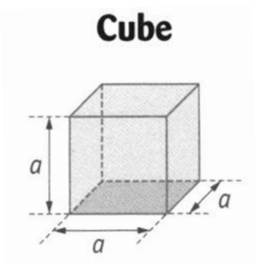


$\mathcal{A} = \dfrac{c \times h}{2}$

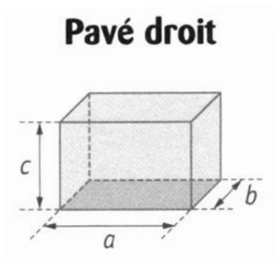


$\mathcal{A} = r \times r \times \pi$
$= r^2 \times \pi = \pi\, r^2$

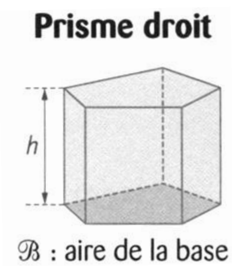
Volumes des solides



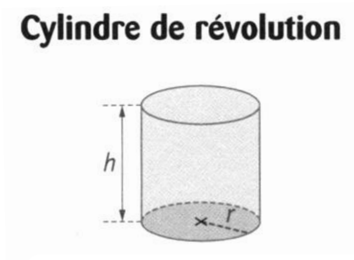
$\mathcal{V} = a \times a \times a$
$= a^3$



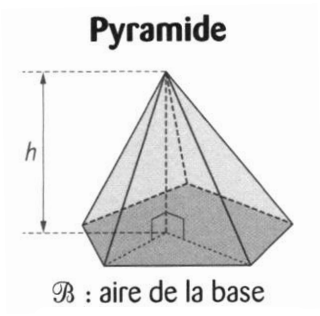
$\mathcal{V} = a \times b \times c$



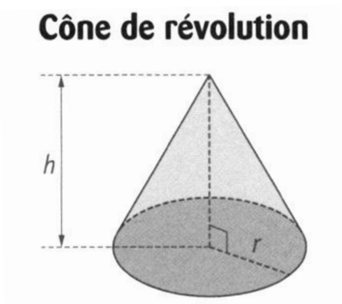
$\mathcal{V} = \mathcal{B} \times h$



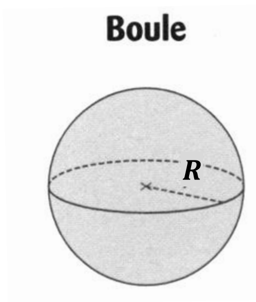
$\mathcal{V} = r^2 \times \pi \times h$



$\mathcal{V} = \dfrac{\mathcal{B} \times h}{3}$



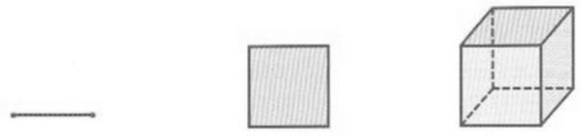
$\mathcal{V} = \dfrac{r^2 \times \pi \times h}{3}$



$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times R^3$

Rappels

Périmètre, aire d’une figure et volume d’un solide



longueur **1 cm** | **aire** **1 cm²** | **volume** **1 cm³**

I – Périmètre d’une figure

Le <u>périmètre</u> d’une figure est la **longueur de son contour**.

Le **périmètre d’un polygone** est donc la somme des longueurs de ses côtés.

<u>Changement d’unités de longueur :</u>

km	hm	dam	m	dm	cm	mm
7	2	3	0	0	0	
		1	6	2	8	

Exemples de conversions :

723 000 cm = 723 dam

162,8 dm = 16,28 m

II – Aire d’une figure

L’<u>aire</u> d’une figure est la mesure de la surface située à l’intérieur de son contour.

L’unité d’aire de référence est **le *mètre carré*, noté *m²*.**

☞ **1 m²** est **l’aire d’un carré de 1 m de côté.**

<u>Changement d’unités d’aire :</u>

km²		hm²		dam²		m²		dm²		cm²		mm²	
									1	5	8		
				9	4	2	0						
	0	0	8	7									

Exemples de conversions :

158 cm² = 1,58 dm²

94,2 dam² = 9 420 m²

8,7 hm² = 0,087 km²

III – Volume d’un solide

Le <u>volume</u> d’un solide est la mesure de **l’espace contenu à l’intérieur de ce solide**.

L’unité de volume de référence est le ***mètre cube*, noté *m³*.**

☞ **1 m³** est **le volume d’un cube de 1 m d’arête.**

Pour mesurer des volumes de liquides ou de gaz, on utilise les unités de capacité.

Une capacité de 1 L correspond à un volume de 1 dm³ :

1 L = 1 dm³

<u>Changement d’unités de volume :</u>

km³			hm³			dam³			m³			dm³			cm³			mm³		
											kL	**hL**	**daL**	**L**	**dL**	**cL**	**mL**			
		1	3	0	0															
										8	6	0	0	0						
																6	2	7	1	0

Exemples de conversions :

1,3 km³ = 1 300 hm³ 86 000 L = 86 m³ 62,71 cm³ = 62 710 mm³

Compétences travaillées en mathématiques	Domaines
Chercher → extraire d'un document les informations utiles, les reformuler, les organiser,les confronter à ses connaissances ; → s'engager dans une démarche scientifique, observer, questionner, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, chercher des exemples ou des contre-exemples, simplifier ou particulariser une situation, émettre une conjecture ; →tester, essayer plusieurs pistes de résolution ; →décomposer un problème en sous-problèmes.	D 4
Modéliser → reconnaître un modèle mathématique (proportionnalité, équiprobabilité) et raisonner dans le cadre de ce modèle pour résoudre un problème ; → traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques) ; → comprendre et utiliser une simulation numérique ou géométrique ; → valider ou invalider un modèle, comparer une situation à un modèle connu (par exemple un modèle aléatoire).	D 4
Représenter → choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique,géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique ; → produire et utiliser plusieurs représentations des nombres ; → représenter des données sous forme d'une série statistique ; → utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides (par exemple perspective ou vue de dessus/de dessous) et de situations spatiales (schémas, croquis, maquettes, patrons, figures géométriques, photographies, plans, cartes, courbes de niveau).	D 4
Raisonner → résoudre des problèmes impliquant des grandeurs variées (géométriques, physiques, économiques) : mobiliser les connaissances nécessaires, analyser et exploiter ses erreurs, mettre à l'essai plusieurs solutions ; → mener collectivement une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui ; → démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies (propriétés, théorèmes, formules) pour parvenir à une conclusion ; → fonder et défendre ses jugements en s'appuyant sur des résultats établis et sur sa maîtrise de l'argumentation.	D 4
Calculer → calculer avec des nombres rationnels, de manière exacte ou approchée, en combinant de façon appropriée le calcul mental, le calcul posé et le calcul instrumenté (calculatrice ou logiciel) ; → contrôler la vraisemblance de ses résultats, notamment en estimant des ordres de grandeur ou en utilisant des encadrements ; → calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.).	D1.3
Communiquer → faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique. Distinguer des spécificités du langage mathématique par rapport à la langue française ; → expliquer à l'oral ou à l'écrit (sa démarche, son raisonnement, un calcul, un protocole de construction géométrique, un algorithme), comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange ; → vérifier la validité d'une information et distinguer ce qui est objectif et ce qui est subjectif ; lire, interpréter, commenter, produire des tableaux, des graphiques, des diagrammes.	D1.3

Sommaire des leçons 5ème

Sommaire des leçons 4ème

Sommaire des leçons 3ème

Thème A – Nombres et calculs

Sommaire des leçons

A-1-Organisation d'un calcul

Vocabulaire

L'addition	est l'opération qui permet de calculer	la somme	de deux nombres.
La soustraction		la différence	
La multiplication		le produit	
La division		le quotient	

→ Les nombres dans une somme et une différence sont appelés les termes ; Les nombres dans un produit sont les facteurs.

Priorités dans un calcul

Dans une expression numérique, on effectue dans l'ordre :

1 – Les calculs entre parenthèses en commençant par les plus intérieures.
2 – Les multiplications et les divisions.
3 – Les additions et les soustractions.

Exemples

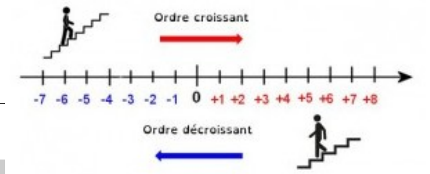
$A = 10{,}4 - (\underline{2 + 4{,}4})$	$B = 27 - (7 \times (\underline{42 - 39}))$	$C = 10{,}4 - \underline{1{,}1 \times 4} + \underline{12 \div 3}$
$A = 10{,}4 - 6{,}4$	$B = 27 - (\underline{7 \times 3})$	$= \underline{10{,}4 - 4{,}4} + 4$
$\underline{A = 4}$	$B = 27 - 21$	$= 6 + 4$
	$\underline{B = 8}$	$\underline{C = 10}$

Remarque 1 : Dans une expression sans parenthèses ne comportant que des opérations d'égale priorité, on effectue les calculs dans l'ordre, de la gauche vers la droite.

Remarque 2 :Lorsqu'il y a une expression au numérateur ou au dénominateur on procède comme si cette expression était entre parenthèses.

$$D = \frac{3+4\times6}{12-3} = \frac{3+24}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

A-2-Nombres relatifs



Définitions

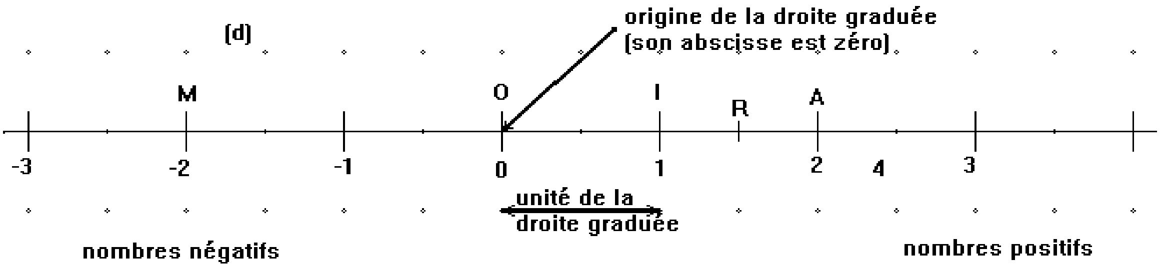
Un nombre **positif** est un nombre <u>supérieur à 0</u> (ex : + 2,15 ou 2,15)
Un nombre **négatif** est un nombre <u>inférieur à 0</u> (ex : – 3,72)
L'ensemble des nombres positifs et négatifs forme l'ensemble des **nombres relatifs.**

<u>Exemples</u> : -2 ; - - 204 158 – 0,00 ; - 12,74 sont négatifs .
5 ; + 19 ; + 2 145 879 ; 0,07 ; 14,7 sont positifs

Le **nombre 0** est le seul nombre qui est à la fois positif et négatif.

Droite graduée

- un **sens** (indiqué par une flèche souvent orientée vers la droite)
- une **origine** (repéré par le nombre 0)
- une **unité** (la distance entre les points repérés par les nombres 0 et 1)



<u>Définition :</u> Sur une droite graduée, **<u>l' abscisse</u>** d'un point le nombre relatif qui sert à repérer le point.

<u>Exemples</u> : L'abscisse du point M est – 2 : on note M (– 2)
1,5 est l'abscisse du point R : on note R(1,5)

<u>Définition</u> : La **distance à zéro** d'un nombre relatif est la <u>distance</u> (en unités) <u>entre l'origine et le point</u> repéré par ce nombre.

La distance à zéro est donc toujours un nombre positif, le plus souvent on l'écrit sans son signe.

<u>Exemples</u> : La distance à zéro de (+ 4,7) est 4,7
La distance à zéro de (- 89,5) est 89,5.

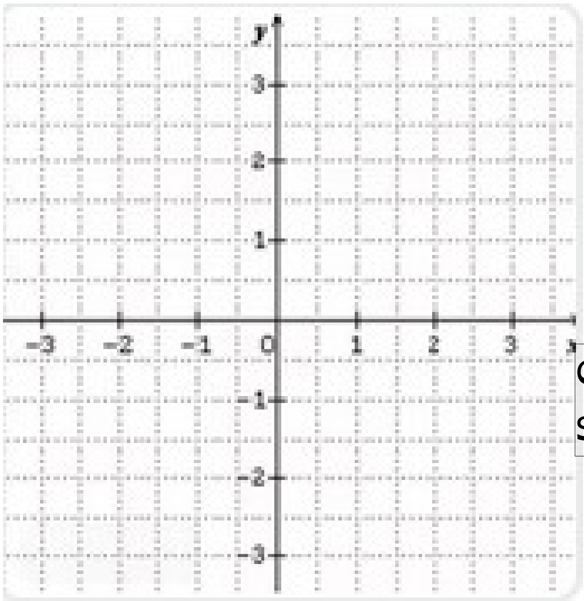
A-3-REPÉRAGE

REPÉRAGE D'UN POINT DANS LE PLAN.

Un repère est constitué de deux <u>axes gradués</u> :

- l'axe horizontal est **<u>l'axe des abscisses</u>**
- l'axe vertical est **<u>l'axe des ordonnées</u>.**
- Le point d'intersection de ces deux axes est **l'origine du repère.**

Axes des ordonnées



Axe des abscisses

Origine du repère.
Ses coordonnées sont (0,0)

+ A

Chaque point du repère peut être repéré par deux nombres relatifs appelés **les <u>coordonnées</u> du point** :

- le premier nombre, lu sur l'axe des abscisses (Ox) : **l'abscisse**
- le deuxième nombre, lu sur l'axe des ordonnées (Oy): **l'ordonnée**

<u>Exemples</u> : Le point A a pour abscisse 2,5 et pour ordonnée -2 :
Ses coordonnées sont 2,5 et – 2. On note A(2,5 ; -2)

Place dans le repère le point B de coordonnées (- 1,5 ; 3)

$(+4) - (+7) =$
on ajoute l'opposé
$(+4) + (-7) = (-3)$

A-4-Nombres relatifs : Additions et soustractions

<u>Règle 1</u> **:**Pour additionner deux nombres relatifs **<u>de même signe</u>**, on **<u>ajoute</u>** <u>les distances à zéro</u> ,et on place devant le résultat le signe commun **.**

Exemples :	(+ 5) + (+ 3) = + 8	(– 4) + (– 7) = – 11

<u>Règle 2</u> : Pour additionner deux nombres relatifs **<u>de signes contraires</u>**, on calcule **<u>la différence d</u>**<u>es distances à zéro,</u> et on place devant le résultat **le signe du nombre qui a la plus grande distance à zéro.**

Exemples :	(+ 6) + (– 9) = – 3	(+ 5) + (– 3) = + 2

<u>propriété :</u> Dans une **<u>somme</u>** de nombres relatifs, changer l'ordre des termes ne change pas le résultat.

<u>→ Opposé d'un nombre relatif</u>

<u>Définition :</u> La somme d'un nombre et son opposé est égale à 0.

Exemple : (-2) est l'opposé de (+2) car (-2) + (+2) = 0
(+ 12,3) est l'opposé de (- 12,3) car (- 12,3) + (+12,3) = 0

<u>→ Soustraction</u>

<u>Règle 3</u> : Soustraire un nombre, revient à ajouter son opposé.

Exemples :	(+2) – (+5) = (+2) + (-5) =– 3	(- 3) – (- 7) = (- 3) + (+ 7) = + 4
	(+5) – (+3) = (+5) + (- 3) = – 2	(- 8) – (- 3) = (- 8) + (+3) = - 5

<u>→ Sommes algébriques :</u> <u>Écriture simplifiée, sans parenthèses</u>

Comme « soustraire un nombre, revient à ajouter son opposé », une suite d'addition et de soustraction est en réalité toujours une somme :
- 2 + 3 - 4 + 5 est en réalité la somme : (- 2) + (+ 3) + (- 4) + (+ 5)

B = **- 2** + 3 **- 4** + 5 **- 6** = 3 + 5 **- 2 - 4 - 6** = 8 **- 12** = - 4.

On regroupe les positifs et les **négatifs**.

A-5-Nombres relatifs : multiplications et divisions

Produit de nombres relatifs

1) Règle de calcul : Pour multiplier deux nombres relatifs, on multiplie les deux distances à zéro et on applique **la « règle des signes »** :

→ Si les deux nombres sont de **même signe**, le résultat est **positif.**

→ Si les deux nombres sont de **signes contraires**, le résultat est **négatif.**

Exemples :

$(-6)\times(-7)=42$	$4\times(-5)=-20$	$5{,}4\times 2=10{,}8$	$-4\times 1{,}5=-6$
Deux nombres de même signe, résultat positif.	*Deux nombres de signes contraires, résultat négatif*	*Deux nombres de même signe, résultat positif.*	*Deux nombres de signes contraires, résultat négatif*

Définition: le carré d'un nombre est le produit de ce nombre par lui-même.

Exemples : 5×5 est le carré de 5.

On le note 5^2 : cette écriture se lit « *5 au carré* ». $5^2=25$

De la même manière : $(-7)^2 = (-7)\times(-7) = 49$

Propriété : le carré d'un nombre est toujours positif

Preuve : ....

2) Produit de plusieurs nombres relatifs

Pour multiplier plusieurs nombres relatifs, on multiplie les distances à zéro ensemble, puis on compte **le nombre de facteurs négatifs** :

Si le nombre de facteurs négatifs est **pair**, alors le résultat est **positif.**

Si le nombre de facteurs négatifs est **impair**, alors le résultat est **négatif.**

Exemples :

$-2\times 4\times(-5)=40$

Il y a 2 facteurs négatifs : -2 *et* -5

$-3\times(-2)\times(-8)=-48$

Il y a 3 facteurs négatifs: -3 ; -2 ; -8

Quotient de deux nombres relatifs

Règle de calcul : Pour diviser deux nombres relatifs, on divise d'abord les distances à zéro, puis on détermine le signe du résultat en utilisant **la même « règle des signes »** que pour un produit.

Exemples :

$(-4{,}5)\div(-5)=0{,}9$

$(-32)\div 4=-8$

$(+55)\div(+5)=11$

$10\div(-4)=-2{,}5$

A-6-FRACTIONS

Définition et vocabulaire

- Soient a et b deux nombres avec $b \neq 0$, le **quotient de a par b** est le résultat de la division de a par b, c'est le nombre manquant dans la multiplication : $b \times ? = a$; $? = \frac{a}{b}$ (écriture fractionnaire)

- Dans le nombre $\frac{a}{b}$ **a est le numérateur** et **b est le dénominateur.**

- Lorsque a et b sont des **nombres entiers,** $\frac{a}{b}$ est **une fraction.**

Quotients égaux

1) Propriété : égalité de fractions

Le quotient de deux nombres ne change pas si **on multiplie ou on divise** ces deux nombres par **un même nombre** non nul.

Exemples :

→ $\frac{3}{5}=\frac{18}{30}$ car on multiplie le numérateur **et** le dénominateur par 6.

→ $\frac{81}{36}=\frac{9}{4}$ car on divise le numérateur **et** le dénominateur par 9.

2) Une application : réduction de fractions

Réduire une fraction, c'est trouver une fraction égale avec un numérateur et un dénominateur **entiers plus petits.**

Une fraction irréductible est une fraction qui ne se réduit pas.

$\frac{81}{36}=\frac{9}{4}$ dans cet exemple, $\frac{9}{4}$ est l'écriture irréductible du quotient

Propriété : Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par **le plus grand diviseur commun aux deux nombres.**

(Voir les leçons d'arithmétique)

Exemple : $\frac{84}{63}=\frac{84\div 7}{63\div 7}=\frac{14}{9}$ On a simplifié par le PGCD de 84 et 63, la fraction obtenue est irréductible.

A-7-COMPARAISONS DE NOMBRES

Symboles mathématiques, en lisant de gauche à droite :

$<$: signifie « inférieur à » (ou « plus petit que »)

$>$: signifie « supérieur à » (ou « plus grand que »)

Nombres relatifs

→ Si les **deux nombres sont négatifs**, on les range dans l'ordre inverse de leur distance à zéro : le plus petit nombre est celui qui a la plus grande distance à zéro.

→ Si un nombre est **positif** et l'autre est **négatif**, le nombre positif est toujours le plus grand !

Exemples : $6,3 > 6,17$; $-3 < 7$; $-6 < -1$; $-41,2 < -40$

Fractions

1) Comparer une fraction au nombre 1

Une fraction est inférieure à 1 quand son numérateur est plus petit que son dénominateur.

Exemples : $\frac{3}{2} > 1$ car $3 > 2$ et $\frac{150}{177} < 1$ car $150 < 177$

2) Pour comparer deux fractions, on peut :

→ **Utiliser l'écriture décimale du quotient.**

→ **Les réduire au même dénominateur, elles se rangent alors dans l'ordre de leurs numérateurs.**

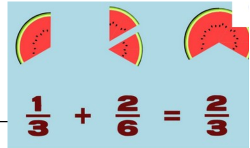
→ **Les écrire avec le même numérateur, elles se rangent alors dans l'ordre inverse de leurs dénominateurs.**

Écritures décimales : $\frac{7}{10} = 0,7$; $\frac{42}{50} = 8,4$ **donc :** $\frac{7}{10} < \frac{42}{50}$

Avec le même dénominateur: $\frac{6}{7} = \frac{18}{21}$; $\frac{17}{21}$ **donc :** $\frac{6}{7} > \frac{17}{21}$

Avec le même numérateur: $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$; $\frac{6}{7} = \frac{12}{14}$ **donc :** $\frac{4}{5} < \frac{6}{7}$

A-8-Fractions : additions et soustractions



Pour additionner ou soustraire deux fractions:

→ on les écrit d'abord **avec le même dénominateur**

→ puis on **ajoute ou on soustrait** les numérateurs et on garde le **dénominateur commun.**

Soient a, b et c trois nombres relatifs, avec c différent de zéro :

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{et} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Exemples : *Calculer en écrivant les étapes :*

$A=\frac{-14}{5}-\frac{9}{10}$	$B=\frac{11}{6}-\frac{3}{4}$	$C=7+\frac{5}{8}$	$D=\frac{7}{2}-\frac{-1}{6}+\frac{5}{9}$
$=\frac{-28}{10}-\frac{9}{10}$	$=\frac{22}{12}-\frac{9}{12}$	$=\frac{7}{1}+\frac{5}{8}$	$=\frac{63}{18}-\frac{-3}{18}+\frac{10}{18}$
$A=\frac{-37}{10}$	$B=\frac{13}{12}$	$=\frac{56}{8}+\frac{5}{8}$	$=\frac{76}{18}$
		$C=\frac{61}{8}$	$C=\frac{38}{9}$

Exemples : Calculer puis simplifier éventuellement la fraction obtenue

$A=\frac{2}{3}+\frac{5}{3}$	$B=\frac{15}{7}-\frac{6}{7}$	$C=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$	$D=\frac{5}{2}+6$
$=\frac{2+5}{3}$	$=\frac{15-6}{7}$	$=\frac{10}{15}+\frac{2}{15}$	$=\frac{5}{2}+\frac{12}{2}$
$A=\frac{7}{3}$	$B=\frac{11}{7}$	$=\frac{10+2}{15}$	$=\frac{5+12}{15}$
		$C=\frac{12}{15}=\frac{4}{5}$	$D=\frac{17}{15}$

Problème : Eloïse a mangé $\frac{1}{4}$ et Karim $\frac{3}{8}$ du même gâteau.

a) Quelle part du gâteau ont-ils mangée à eux deux ?

b) Quelle part du gâteau reste-il ?

Réponse :

a) Ils ont mangé a eux deux : $\frac{1}{4}+\frac{3}{8}=\frac{2}{8}+\frac{3}{8}=\frac{5}{8}$ soit $\frac{5}{8}$ du gâteau

b) Il reste donc : $1-\frac{5}{8}=\frac{8}{8}-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$ soit $\frac{3}{8}$ du gâteau

A-9-FRACTIONS : MULTIPLICATIONS ET DIVISIONS

Multiplications de fractions

Pour multiplier des fractions, on **multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.**

Exemples : Calculer et simplifier les résultats lorsque c'est possible :

$$E=\frac{-11}{8}\times\frac{-3}{10}$$
$$E=\frac{-11\times(-3)}{8\times10}$$
$$E=\frac{33}{80}$$

$$F=\frac{9}{2}\times\frac{5}{9}$$
$$F=\frac{9\times5}{2\times9}$$
$$F=\frac{5}{2}$$

$$G=-6\times\frac{4}{7}$$
$$G=\frac{-6\times4}{7}$$
$$G=-\frac{24}{7}$$

$$H=\frac{45}{8}\times\frac{24}{-20}$$
$$H=-\frac{3\times3\times5\times3\times8}{8\times4\times5}$$
$$H=\frac{27}{4}$$

45 = 3×3×5
24=3×8
20=2×2×5

Divisions de deux fractions

1) Définition: Deux nombres inverses l'un de l'autre ont **leur produit égal à 1.**

Exemples: L'inverse de 2 est 0,5 = $\frac{1}{2}$ car 2 × 0,5 = 1

L'inverse de 3 est $\frac{1}{3}$ car $3\times\frac{1}{3}=1$; L'inverse de $\frac{5}{9}$ est $\frac{9}{5}$ car $\frac{9}{5}\times\frac{5}{9}=1$

L'inverse de 1 est 1 car 1×1 = 1 ; **0 n'a pas d'inverse**

Propriétés : Soit x un nombre non nul. **L'inverse de x est** $\frac{1}{x}$ (noté aussi x^{-1}).

Soient a et b deux nombres relatifs avec $a\neq0$ et $b\neq0$. **L'inverse de** $\frac{a}{b}$ **est** $\frac{b}{a}$

Preuves :..

Divisions par une fraction

Diviser par un nombre non nul revient **à multiplier par son inverse.**

Preuve : ....

Exemples : Calculer et simplifier les résultats lorsque c'est possible :

$$I=\frac{-10}{3}\div\frac{-4}{7}$$
$$I=\frac{10}{3}\times\frac{7}{4}$$
$$I=\frac{2\times5\times7}{3\times2\times2}$$
$$I=\frac{35}{6}$$

$$J=\frac{1}{-9}\div8$$
$$J=\frac{1}{-9}\times\frac{1}{8}$$
$$J=-\frac{1}{72}$$

$$K=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{8}{9}}$$
$$K=\frac{5}{2}\times\frac{9}{8}$$
$$K=\frac{45}{16}$$

$$L=\frac{3}{\frac{-6}{7}}$$
$$L=3\times\frac{7}{-6}$$
$$L=-\frac{3\times7}{2\times3}¿$$
$$L=-\frac{7}{2}$$

A-10-PUISSANCES

Définitions d'une puissance entière

Puissance d'exposant positif

*Définition:*Soient a un nombre relatif et n un nombre entier positif non nul. L'écriture a^n désigne **le produit de n facteurs égaux à a.**

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{\text{n facteurs}}$: **L'écriture a^n se lit « a exposant n ».**

Exemples : 2^7 est le produit de sept facteurs égaux à 2.

2^7 se lit « 2 exposant 7 » et $2^7 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2 = 128$

« -1 exposant 6 » : $(-1)^6 = (-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1)\times(-1) = 1$

« Trois quart exposant 5 » : $\left(\dfrac{3}{4}\right)^5 = \dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4} = \dfrac{3^5}{4^5} = \dfrac{243}{1024}$

« 5,8 au cube » : $5{,}8^3 = 5{,}8\times5{,}8\times5{,}8 = 195{,}112$

Pour tout nombre relatif a : $a^1 = a$; Pour tout nombre entier n : $1^n = 1$

Propriété :

Si l'exposant est pair, la puissance d'un nombre négatif est positive

Si l'exposant est impair, la puissance d'un nombre négatif est négative

Exemples : $(-3)^4 = 81$ est positif car 4 est pair ;

$(-6)^5 = -7776$ est négatif car 5 est impair

Puissance d'exposant négatifs

*Définition:*Soient a un nombre relatif et n un nombre entier positif non nul. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$: a^{-n} est l'inverse de a^n

Exemples : $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ $\qquad (-5)^{-3} = \dfrac{1}{(-5)^3} = -\dfrac{1}{125}$

Puissance d'exposant nul Pour tout nombre relatif non nul x : $x^0 = 1$

Ordre d'un calcul : Dans un calcul numérique, on effectue les puissances (et les racines carrées) avant les multiplications et les divisions.

A-11-PUISSANCES DE 10

Soit n un entier positif :

$$10^{n}=10\times10\times\ldots\times10=\underbrace{100\ldots00}_{\text{n zéros}} \quad \text{et} \quad 10^{-n}=\frac{1}{10^{n}}=\underbrace{0{,}00\ldots001}_{\text{n zéros}}$$

<u>Exemples</u> :

$10^{8}=100\,000\,000$ L'exposant est 8: on met 8 zéros <u>après</u> le chiffre 1.

$10^{-5}=0{,}00001$ L'exposant est -5 : on met 5 zéros <u>avant</u> le chiffre 1.

<u>Propriété</u> :Soit n un entier relatif :

- Pour multiplier par 10^{n} on décale la virgule de *n* **rangs vers la <u>droite</u>.**
- Pour multiplier par 10^{-n} on décale la virgule de *n* **rangs vers la <u>gauche</u>.**

<u>Exemples</u> : $5{,}4\times10^{7}=54\,000\,000$ $\quad$ $390\times10^{-5}=0{,}0039$

<u>Écriture (ou notation) scientifique</u>

<u>Définition</u> :Un nombre est écrit en **<u>notation scientifique</u>** quand il est écrit sous la forme $a\times10^{n}$ avec n entier relatif et $1\leq a<10$

<u>Exemples</u> : $-835\,000\,000=-8{,}35\times10^{8}$ $\quad$ $0{,}000\,000\,26=2{,}6\times10^{-7}$

<u>Préfixes liés aux puissances de 10</u>

Voici le tableau des préfixes à connaître au collège :

valeurs	puis-sances de 10	préfixes	sym-boles
1 000 000 000 000	10^{12}	**téra**	**T**
1 000 000 000	10^{9}	**giga**	**G**
1 000 000	10^{6}	**méga**	**M**
1 000	10^{3}	**kilo**	**k**
100	10^{2}	**hecto**	**h**
10	10^{1}	**déca**	**da**

valeurs	puis-sances de 10	pré-fixes	sym-boles
0,1	10^{-1}	**déci**	**d**
0,01	10^{-2}	**centi**	**c**
0,001	10^{-3}	**milli**	**m**
0,000 001	10^{-6}	**micro**	**µ**
0,000 000 001	10^{-9}	**nano**	**n**

Un disque dur d'1 To signifie qu'il a une capacité de 1 000 000 000 000 octets. (1 000 000 000 000 se lit « mille milliards »)

A-12-Division euclidienne et critères de divisibilité

On ne travaille ici qu'avec des <u>nombres entiers positifs</u>

Divisibilité : vocabulaire et définitions

$$\begin{array}{c|c} a & b \\ \cline{2-2} & q \\ r & \end{array}$$

Soient a et b deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$.

Définition : Effectuer **la division euclidienne de a par b**, c'est trouver les deux nombres entiers positifs q et r tels que :

$a = b \times q + r$; **$r < b$** est **le quotient** et **r** est **le reste**

On admet l'existence et l'unicité du couple de nombre (q;r) ainsi défini.

Exemple : La division euclidienne de 65 par 9 donne 7 comme quotient et 2 comme reste car : $65=7\times 9+2$ et $2<9$

Définition : Lorsque le reste de la division euclidienne de a par b a **est nul**, on dit que :→ *a* est **un multiple** de *b* *ou que* *a* est **divisible par** b

→ *b* est **un diviseur** de *a* *ou que* *b* **divise** *a*

Cela signifie qu'il existe un nombre entier positif k tel que a = b×k .

Exemples: Division euclidienne de 40 par 8 : q = 5 et r= 0 car: 40 = 5 × 8 40 est un multiple de 8, 40 est divisible par 8; 8 divise 40 ou 8 est un diviseur de 40.

Rappels : critères de divisibilité : Un nombre **divisible**

→par 2 est un nombre pair : il se termine par 0 ; 2 ;4 ; 6 ou 8.

→par 5 se termine par 0 ou par 5 ; → par 10 se termine par 0.

→par 3 a la somme de ses chiffres divisible par 3.

→par 9 a la somme de ses chiffres divisible par 9.

→par 4 a ses deux derniers chiffres qui forment un nombre divisible par 4

Définition : Un **diviseur commun** à deux nombres entiers a et b est un nombre entier **qui divise à la fois a et b.**

Exemple : Les diviseurs communs à 84 et à 63 Diviseurs de 84 : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 7 ; 12 ; 14 ; 21 ; 28 ; 42 ; 84. Diviseurs de 63 : 1 ; 3 ; 7 ; 9 ; 21 ; 63. Les diviseurs communs à 84 et à 63 sont donc 1 ; 3 ; 7 ; 21 : ils apparaissent dans les deux listes.

A-13-Nombres premiers

Définition: Un **nombre premier** est un nombre entier positif qui admet **exactement deux diviseurs** (1 et lui-même).

Remarque : Le nombre 1 admet un seul diviseur (lui-même), ce n'est donc pas un nombre premier: Le **plus petit nombre premier est le nombre 2.**

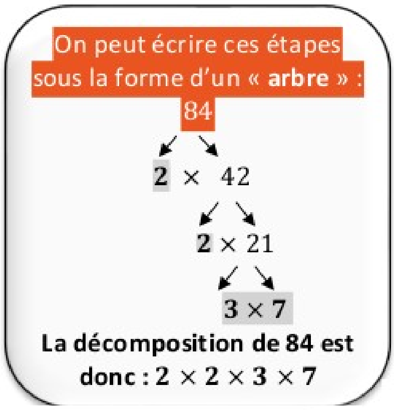
Voici le début de la liste des nombres premiers dans l'ordre croissant :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 etc ...

Décomposition en produit de facteurs premiers

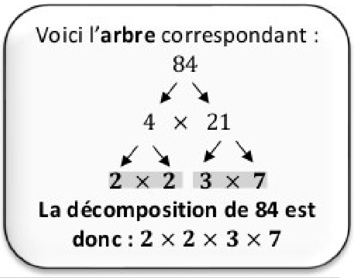
Propriété (admise) : Un nombre entier supérieur ou égal à **2 se décompose de manière unique en produit de facteurs premiers.**

Exemple : **Décomposer le nombre 84 en produit de facteurs premiers.**
La décomposition est unique : il y a différentes manières de la trouver mais toutes nous mèneront à la même décomposition finale.

1ère méthode : On cherche ses diviseurs premiers dans l'ordre croissant :
84 est divisible par 2 donc : $84 = 2 \times 42$
42 est encore divisible par 2 donc : $84 = 2\times 2 \times 21$
21 est divisible par 3 donc : $84 = 2\times 2 \times 3 \times 7$
Or 7 est un nombre premier donc c'est terminée :
$84 = 2^2 \times 3 \times 7$



2ème méthode :on décompose en produit jusqu'à trouver les facteurs premiers :
$84 = 4 \times 21 = 2\times 2 \times 3 \times 7$



Plus grand diviseur commun (PGCD)

Pour trouver le plus grand diviseur commun de deux nombres, il existe une *méthode qui évite de chercher tous les diviseurs :*
On effectue le produit de tous les facteurs premiers communs.

Exemple : $108 = 2^2 \times 3^3$ et $126 = 2\times3^2\times7$; PGCD (108;126) = $2 \times 3^2 = 18$

Voir leçon «Fractions», pour rendre irréductible une fraction : $\dfrac{108}{126} = \dfrac{108 \div 18}{126 \div 18} = \dfrac{6}{7}$

A-14-INITIATION AU CALCUL LITTÉRAL

Définition et conventions

<u>Une expression littérale</u> est une expression qui contient des nombres, des lettres et des signes opératoires. Les lettres sont appelées **« variables »**

→ Le signe «×» peut être **<u>supprimé</u> devant une lettre ou une parenthèse.**

<u>Exemples :</u>

→ Le produit 47×a peut s'écrire 47a	→ $8\times(x + 3) = 8(x + 3)$
→ Le produit a×47 s'écrit aussi 47a	→ $2\ (1 + 9x) = 2\times(1 + 9\times x)$
→ a×b peut s'écrire ab.	

ATTENTION ! 5 × 7 s'écrit pas 57 !

Substituer une valeur numérique à une lettre

Lorsque l'on connaît la valeur numérique des variables, on peut calculer la valeur d'une expression littérale.

<u>Exemple:</u> Soit $A = 3x + 5$; Calculons la valeur de A pour $x = 2$

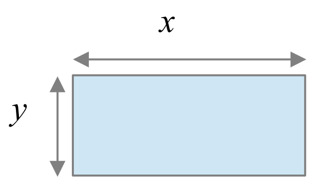
$A = 3\times2 + 5 = 6 + 5 = 11$

Produire une expression littérale

Exemples : → Le double de *n* s'écrit <u>2*n*</u>

→ La somme de a et de la moitié de b s'écrit <u>a + b÷2</u>

Soit un rectangle de longueur x et de largeur y :



Son <u>périmètre</u> s'écrit : $P = 2\,(y + x)$

ou bien $P = 2y + 2x$

Son <u>aire</u> s'écrit : $A = x\,y$

Carré et cube d'un nombre

<u>Le carré</u> d'un nombre est le nombre multiplié par lui même et se note avec 2 en exposant : $a^2 = a \times a$ (c'est l'aire d'un carré de coté a)

<u>Le cube d'un nombre</u> est le nombre multiplié par lui même trois fois et se note avec 3 en exposant : $a^3 = a \times a \times a$ (volume d'un cube de coté a)

Exemples : $4^2 = 4 \times 4 = 16$ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

A-15-CALCUL LITTÉRAL : DÉVELOPPER-RÉDUIRE

A savoir :

$1x = x$

$x + x = 2x$

$x \times x = x^2$

$2x + 5x = 7x$

$2x + 5 = 2x+5$

$2x+5x^2 = 2x+5x^2$

$2x \times x = 2x$

$2x \times 5x = 10x^2$

Calculer l'opposé d'une expression littérale

L'opposé d'une expression littérale est **l'opposé de chacun de ses termes.**

Exemple 1 :

L'opposée de ($3x + 5x^2 - 8$) est égale à : $- 3x - 5x^2 + 8$

C'est à dire : $-(3x + 5x^2 - 8) = - 3x - 5x^2 + 8$

Exemple 2 : $-(-7a + 2y - 10) = 7a - 2y + 10.$

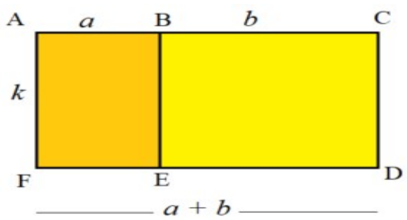
DÉVELOPPEMENT

Développer une expression littérale, c'est transformer un produit en une somme en utilisant l'une des formules de **distributivité** suivantes :

On dit que : la multiplication est distributive sur l'addition

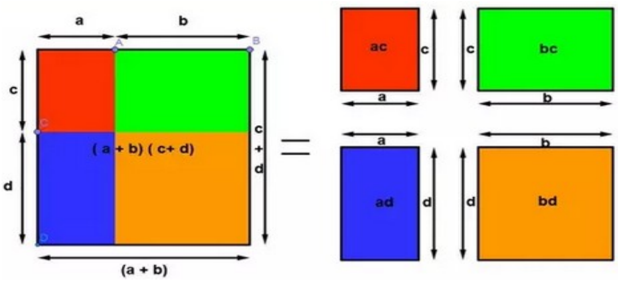
Soient k, a, b, c et d des nombres relatifs :

Simple distributivité : $k(a + b) = ka + kb$



Double distributivité :

$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$



Exemples :

A = 3 ($2x$ – 5) = 3 x $2x$ – 3 x 5 = $6x - 15$

B = - $2x$ ($4x$ – 7) = - $2x$ x $4x$ + $2x$ x 7 = - $8x^2 + 14x$

C = (3 – $2x$)($4x$ – 7)

= 3 x $4x$ – 3 x 7 - $2x$ x $4x$ + $2x$ x 7

= $12x$ – 21 – $8x^2$ + $14x$

C = – $8x^2$ + $26x$ – 21

A-16-CALCUL LITTÉRAL : FACTORISER

Définition : **Factoriser** une expression, c'est l'écrire sous la forme de **produit de facteurs** grace à l'égalité :

$$\boxed{ka + kb = k(a+b)}$$

Pour cela, il faut chercher un facteur commun.

Exemples :

Le facteur commun est un nombre	**Le facteur commun est une lettre**
$\underline{3}x + \underline{3}y = 3(x + y)$	$4\underline{x} + \underline{x}y = \underline{x}(4 + y)$
$5x - 15y = \underline{5}x - 5\times 3y = \underline{5}(x + 3y)$	$3a\underline{x} + 2\underline{x} = \underline{x}(3a + 2)$
$18a - 15b = \underline{3}\times 6a - \underline{3}\times 5b = \underline{3}(6a + 5b)$	$3\underline{a}b - \underline{a} = 3\underline{a}b - \underline{a}\times 1 = \underline{a}(3b - 1)$

Le facteur commun est une expression

$4x^2+2xy = 2\times\underline{2x}\times x + \underline{2x}y = \underline{2x}(2x+y)$ $3a^3b^2 - 2ab = 3\times a\times a\times\underline{a\times b}\times b - 2\times\underline{a\times b}$ $= \underline{a\times b}(3a^2b - 2)$ $12x^3 + 6x^2 = 12\times x\times\underline{x^2} + 6\times\underline{x^2}$ $= \underline{x^2}(12x + 6)$	$A = \underline{(3x-2)}(2x+1) + \underline{(3x-2)}(5x+1)$ $= \underline{(3x-2)}(2x + 1 + 5x + 1)$ $A = \underline{(3x-2)}(7x + 2)$

IDENTITÉ REMARQUABLE

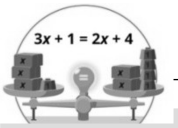
Pour tout nombre relatif a et b : $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

C'est à dire : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Preuve : On utilise la double distributivité

Exemples : Développer ou factoriser avec l'identité remarquable

On développe :	*On factorise* :
$(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$	$100 - 36t^2 = (10 - 6t)(10 + 6t)$
$(2a + 5)(2a - 5) = 4a^2 - 25$	$y^2 - 13 = (y - \sqrt{13})(y + \sqrt{13})$



A-17-ÉQUATIONS

VOCABULAIRE : ÉQUATION – INCONNUE - RÉSOUDRE - SOLUTION

→ **Une équation** est **une égalité** contenant **une ou plusieurs inconnues.**

→ **Résoudre une équation**, c'est trouver la ou les valeurs des inconnues qui rendent cette égalité **vraie.**

→ Ces valeurs s'appellent **les solutions** de l'équation**.**

Remarque : Dans la suite du chapitre, on étudiera des équations avec une seule inconnue, souvent notée x

Exemple : $3x+2=4x+1$ est une équation d'inconnue x

→ Si on remplace x par -3, Membre de gauche : $3\times(-3)+2=-7$ Membre de droite : $4\times(-3)+1=-11$ Donc : (-3) n'est pas une solution de l'équation.	→ Si on remplace x par 1, Membre de gauche : $3\times1+2=5$. Membre de droite : $4\times1+1=5$ Donc : 1 est une solution de l'équation

Technique de Résolution d'une équation

Règle 1 : Si on ajoute ou retranche aux deux membres d'une équation un même nombre alors on ne modifie pas les solutions de l'équation.

Règle 2 : Si on multiplie ou on divise les deux membres d'une équation par un même nombre non nul alors on ne modifie pas les solutions de l'équation. :

Résolvons l'équation : $3x-5=7$

On ajoute 5 à chaque membre $3x-5+5=7+5$

on réduit $3x=12$

On divise par 3 chaque membre $\frac{3x}{3}=\frac{12}{3}$

on réduit $x=\frac{12}{3}=4$

La solution de l'équation est 4

Vérification :

Si on remplace x par 4, dans le membre de gauche: $3\times4-5=12-5=7$

Autres exemples

$10=4-3x$ $10-4=4-4-3x$ $6=-3x$ $\frac{6}{-3}=\frac{-3x}{-3}$ $-2=x$ $x=-2$.	$x+2=10-3x$ $x+2-2=10-2-3x$ $x=8-3x$ $x+3x=8-3x+3x$ $11x=8$ $\frac{11x}{11}=\frac{8}{11}$ $x=\frac{8}{11}$
Vérification :	Vérification :

ÉQUATION-PRODUIT NUL

Propriété :

Si l'un des facteurs d'un produit est nul, alors ce produit est nul :

si A = 0 ou B = 0 alors AB = 0.

Réciproquement, si un produit est nul, alors au moins un de ses facteurs est nul : si A B = 0, alors A = 0 ou B = 0.

Exemple : Résoudre l'équation-produit nul : $(2x+6)(-7x+4)=0$

équivaut à $2x+6=0$ ou $-7x+4=0$

$2x=-6$ $\quad$ $-7x=-4$

$x=\frac{-6}{2}=-3$ $\quad$ $x=\frac{-4}{-7}=\frac{4}{7}$.

L'équation $(2x+6)(-7x+4)=0$ a donc deux solutions : 3 et $\frac{4}{7}$

Une équation qui, à priori, ne ressemble pas à une équation-produit nul, peut s'y ramener en factorisant !

Exemple : $7x^2=21x$	On résout les deux équations :
équivaut à $7x^2-21x=0$	x = 0 et 7x – 3 = 0
soit $x(7x-3)=0$	Il y a deux solutions : 0 et $\frac{3}{7}$

A-18- Résolution de problèmes avec une équation

Résolution du problème en 5 étapes :

1) Choix de l'inconnue : En général on choisit comme inconnue ce qui est demandé dans la question (ou l'une des choses qui sont demandées dans la question) :

2) On exprime les autres données inconnues en fonction de celle choisie

3) On met le problème en équation

4) On résout l'équation

5)On répond à la question et on vérifie son résultat.

<u>Exemple :</u> Deux frères, Marc et jean, possèdent chacun un jardin.
L'aire du jardin de Marc est les 3/4 de l'aire du jardin de Jean.
Les deux frères possèdent en tout 1 470 m2.
Quelles sont les aires des jardins de Marc et de Jean ?

1) Soit x l'aire du jardin de Jean

2) L'aire du jardin de Marc est : $\frac{3}{4}x$

3) D'où l'équation : $x+\frac{3}{4}x=1470$

4)Résolution :

$$\frac{4}{4}x+\frac{3}{4}x=1470$$
$$\frac{7}{4}x=1470$$
$$\frac{4}{7}\times\frac{7}{4}x=1470\times\frac{4}{7}$$
$$x=840$$

Pour trouver l'aire du terrain de Marc, il y a deux calculs possibles:

Soit $\frac{3}{4}\times 840=630$; soit 1470 – 840 = 630

5)Ainsi, l'aire du terrain de Jean est de 840 m² et l'aire du terrain de Marc est de 630 m² .

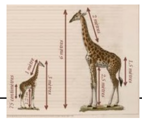
On a bien 840 + 630 = 1470 m²

Thème B

Organisation et gestion de données, fonctions

Sommaire des leçons

B-1-PROPORTIONNALITÉ



Reconnaître une situation de proportionnalité

Définition : **Deux grandeurs sont proportionnelles** lorsque l'une s'obtient **en multipliant** l'autre **par un même nombre** non nul.
Ce nombre est le **coefficient de proportionnalité.**

Exemples : - En cuisine, la quantité de riz à préparer est proportionnelle au nombre de personnes.
- La taille d'une personne n'est pas proportionnelle à son âge.

Tableaux de proportionnalité

Définition : Un **tableau de proportionnalité** est un tableau qui représente une situation de proportionnalité.

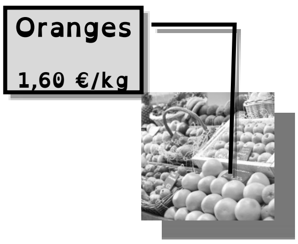
×1,90

Masse des pommes (en kg)	1	2	5
Prix à payer (en €)	1,90	3,80	9,50

Coefficient de Proportionnalité 1,90

Les valeurs de la grandeur « Masse des pommes » est multipliée par 1,90 pour trouver les valeurs de la grandeur «prix à payer».

Recherche « d'une quatrième proportionnelle »



→ Avec le coefficient de proportionnalité :
Pour 3 kg, on payera : 3 × 1,60 = 4,80 €
Avec 16 €, on pourra acheter : 16 ÷ 1,60 = 10 kg

Chez le pâtissier : *Il faut 150 grammes de farine pour un gâteau pour 4 personnes. Quelle sera la quantité de farine nécessaire pour un gâteau destiné à 5 personnes ?*

Méthode 1 : on utilise le coefficient de proportionnalité

Nombre de personnes	4	5
Quantité de farine (g)	150	??

x ?

1) Coefficient de proportionnalité :
? = 150 ÷ 4 = 37,5
2) ?? = 37,5 × 5 = 187,5
Il faut donc 187,5 g de farine

Méthode 2 : <u>on utilise « la règle de trois » (trois étapes) *on dit aussi le passage à l'unité*</u>

Pour un gâteau de 4 personnes, il faut 150g de farine

Pour un gâteau de 1 personne il en faut 4 fois moins soit: 150 ÷ 4 = 37,5 g

Pour un gâteau de 5 personnes, il faut 37,5 × 5 = 187,5 g

<u>La quantité de farine nécessaire est 187,5 g.</u>

Méthode 3 : <u>on utilise la «linéarité» du tableau de proportionnalité, reprenons l'exemple des baguettes :</u>

Nombre de baguettes	1	2	3	4	5	8	10
Prix en Euros	0,90	1,80	2,70	3,60	4,50	7,20	9

\+ =

x 2

x 0,9

De 4 à 8 baguettes, on double le nombre de baguettes, on double le prix.

Pour trouver le prix de 5 baguettes, on ajoute le prix de 2 et le prix de 3.

<u>Pourcentages</u>

Pour les soldes, une réduction de 30% signifie que pour 100 € j'aurai une réduction de 30 €. <u>La réduction est proportionnelle au prix payé.</u>

<u>Le taux de pourcentage</u> : c'est l'écriture sous forme de quotient du pourcentage : $30\ \% = \frac{30}{100} = 0{,}3$

Propriété : Appliquer un taux de pourcentage à un nombre, c'est multiplier ce nombre par le taux de pourcentage.

Exemple : Si j'achète une article de 25 € avec une réduction de 30 %, la réduction sera de : 25 × 0,3 = 7,50 €.

Pourcentages remarquables :	50% : la moitié (on divise par 2)	25% : le quart (on divise par 4)	10% : le dixième (on divise par 10)

<u>Ratio</u>

- Deux nombres a et b ont dans le ratio « 2 : 3 » si $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}$

- que trois nombres a,b,c, sont dans le ratio « 2 : 3 : 7 » si $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{7}$

Égalité des produits en croix

Dans le tableau de proportionnalité ci-dessous, le nombre que l'on cherche est x, on le calcule à l'aide des nombres a, b et c.

a	***c***
b	x

?

Propriété : Les **produits en croix sont égaux** :

$$a \times x = b \times c$$

A RETENIR : Pour trouver x, on effectue le calcul : $\boxed{x = \dfrac{b \times c}{a}}$

Preuves : Démontrées en exercice le ………………………….

Exemple :

Masse des pommes (en kg)	3	5
Prix à payer (en €)	4,3	?

$? = \dfrac{4{,}3 \times 5}{3} \approx 7{,}17$€ *5 kg de pommes coûtent environ 7,17 €*

Représentation graphique d'une situation de proportionnalité

Reprenons l'exemple des oranges :

« tableau de valeurs » : On choisit quelques valeurs (au hasard) pour la masse des oranges et on calcule leur prix. On présente cela dans un tableau de valeurs.

*la « **variable** » est la masse d'oranges*

Masse des oranges (en kg)	**1**	**2**	**2,5**	**3**	**3,2**	**4**	**5**
Prix à payer (en €)							

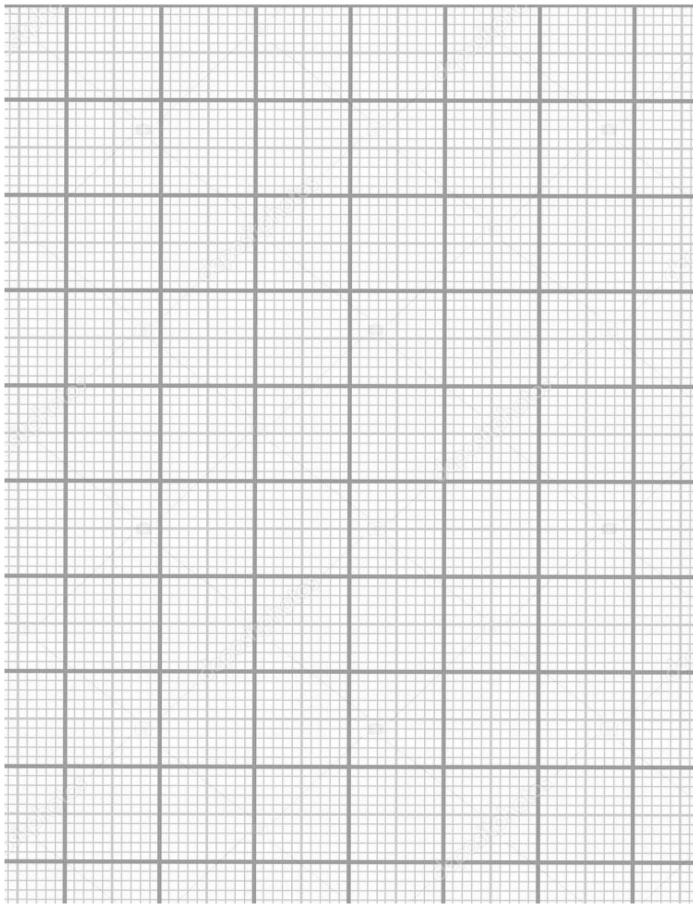
*Le prix à payer se calcule « **en fonction** » de la masse d'oranges*

Représentons graphiquement ce tableau :

→ Sur **l’axe des abscisses :** La variable: la masse d’oranges (1ère ligne)
→ Sur **l’axe des ordonnées** on place le prix à payer (2ième ligne)

Rappel : Axe des abscisses → Horizontal ; Axe des ordonnées → Vertical
Intersection : **l’« origine du repère »**

On choisira judicieusement les unités afin que l’intégralité des valeurs du tableau puissent être placées.



propriété :
Dans un repère, si on représente une situation de **proportionnalité**, alors on obtient **des points alignés avec l’origine du repère.**
Réciproquement, si une situation est représentée par des points alignés avec l’origine du repère, alors c’est une situation de proportionnalité.

Preuve : admise

B-2-PROBABILITÉ

Dénombrement

Définition : Dénombrer, c'est compter des objets.

Pour compter les objets sans en oublier, on essaie d'être *méthodique*, c'est-à-dire de ne pas compter dans n'importe quel ordre : il faut être **OR-GA-NI-SÉ** !

Exemples :

• Combien de nombres entiers de 3 chiffres peut-on construire avec les chiffres 1, 4, et 9 ?

Méthode 1 : On fait une liste de tous les nombres possibles :

On compte d'abord combien de nombres on peut faire en commençant par le chiffre 1 : 1 4 9 et 1 9 4.

Puis commençant par le chiffre 4 : 419 et 491

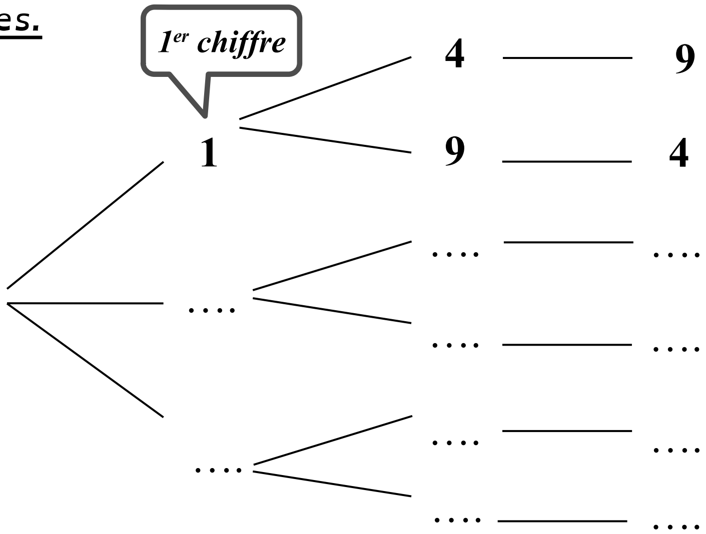
Puis commençant par le chiffre 9 : 914 et 914

Il y a donc 6 nombres possibles.

Méthode 2 :

«arbre des possibles»

Chaque « chemin » (en suivant les branches de gauche à droite) correspond à un nombre possible.



- Sur cet arbre des possibles, passe en fluo le chemin qui donne 491.

On note chaque nombre obtenu sur un morceau de papier et on les met tous dans une urne opaque. On tire *au hasard* un papier et on regarde le nombre inscrit dessus. On appelle cela une **expérience aléatoire.**

On peut dire que l'on aurait : *(complète les phrases par un nombre)*

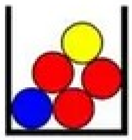
.... chances sur .... de tirer un nombre commençant par 4.

.... chances sur .... de tirer un nombre pair.

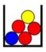
Les mots des probabilités

Expérience aléatoire : C'est une expérience renouvelable, dont le résultat ne peut être prévu, et qui, renouvelée dans des conditions identiques ne donne pas forcément le même résultat à chaque fois.

Exemples :

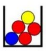
Expérience 1	**Expérience 2**	**Expérience 3**
On lance dune pièce de monnaie et on regarde sur quelle face elle tombe	On tire une boule au hasard dans une urne et on regarde la couleur de la boule.	On tire au hasard une carte et on regarde la « couleur » de la carte
		

Issue : C' est un résultat possible de l'expérience

 **Expérience 1**	 **Expérience 2**	 **Expérience 3**
Les issues sont Pile <u>et</u> Face.	Les issues sont bleu, rouge et jaune.	Les issues sont Coeur, Carreau, Pique et Trèfle.

Evénement

C'est une condition réalisée ou pas lors de l'expérience. Si cette condition est réalisée par **une seule issue**, c'est un événement **élémentaire**

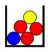
 **Expérience 1**	 **Expérience 2**	 **Expérience 3**
« On obtient face » est un événement élémentaire.	«On obtient une boule rouge» est un événement élémentaire	«On obtient une carte rouge» est un événement (non élémentaire)

On parle aussi d' « Événement impossible » (0 issues possible) et d' « Événement certain » (toutes les issues correspondent).

Notion de probabilité

La probabilité d'un événement est la fréquence théorique de la réalisation d'un événement, on s'en rapproche en effectuant un très grand nombre d'expérience.

Si on appelle A un événement, on note **p(A) la probabilité que l'événement A se réalise.** L'écriture p(A) se lit « **p de A** ».


Expérience 1	**Expérience 2**	**Expérience 3**
P(obtenir face)= $\frac{1}{2}$	P(rouge) = $\frac{3}{5}$	P(obtenir une carte rouge) = $\frac{1}{2}$

Propriétés :

→ La probabilité d'un évènement est un nombre compris entre **0 et 1.**

→ La **somme** des probabilités de **tous** les **évènements élémentaires** d'une expérience aléatoire est égale à 1.

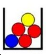
→ La probabilité d'un évènement **impossible est égale à 0.**

→ **La probabilité d'un évènement certain est égale à 1.**

Définition : L'évènement contraire d'un événement A est celui qui se réalise lorsque l'évènement A ne se réalise pas.

On le note «non A» (ou $\overline{A}$).

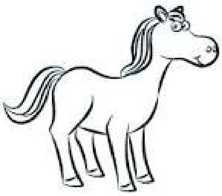
$$P(\text{non } A) = 1 - P(A)$$

 Exemple : Dans la deuxième expérience, la probabilité « d'obtenir une boule bleue ou jaune » est l'événement contraire « d'obtenir une boule rouge ».

P(obtenir une boule bleue ou jaune) = 1 - P(rouge) = 1 - $\frac{3}{5}$ = $\frac{2}{5}$

B-3-STATISTIQUES

Effectif et fréquence



On fait une enquête auprès d' une **population** de 25 élèves d'une classe. Le **caractère** étudié est l'animal préféré. Les données obtenues sont rassemblées dans la **série statistique** suivante :

« Chien Cheval Cheval Dauphin Chien Chat Cheval Poisson-rouge Cheval Chien Chat Chien Cheval Chat Cheval Chat Dauphin Chien Dauphin Chien Hamster Chat Cheval Chien Cheval » ; la série comprend **5 valeurs** possibles (Cheval, Chien, ...)

Définition : **L'effectif** d'une valeur est le nombre de fois où cette valeur apparaît dans la série. **L'effectif total** est le nombre total de données de la série statistique.

Dans un tableau :

Animaux	Cheval	Chien	Chat	Dauphin	Autres	Total
Effectifs	8	7	5	3	2	25

Définition : **La fréquence** d'une valeur est le quotient de l'effectif de cette valeur par l'effectif total.

Exemple : La fréquence de la valeur "chien" est $\frac{7}{25}$ = 0,28 = 28 %

Animaux	Cheval	Chien	Chat	Dauphin	Autres	*Total*
Effectifs	8	7	5	3	2	25
Fréquences	0,32	0,28	0,2	0,12	0,08	*1*
Fréquences (%)	32 %	28 %	20 %	12 %	8 %	*100 %*

Regroupement en classes

On étudie un nouveau caractère sur la population de 25 élèves. Il s'agit de la taille exprimée en mètres. On obtient la série statistique : 1,51 – 1,43 – 1,73– 1,61 – 1,68 – 1,73 – 1,67– 1,62 – 1,65 – 1,67 – 1,76 – 1,48 – 1,66 – 1,60 – 1,64 – 1,52 – 1,63– 1,63 – 1,55– 1,72 – 1,64 – 1,55 – 1,41 – 1,54 – 1,62 – 1,68

Je regroupe les données par tranches de valeurs appelés classes :

Taille (en m)	1,40 ≤t< 1,50	1,50≤t< 1,60	1,60≤t< 1,70	1,70≤t< 1,80
Effectifs	3	5	13	4
Fréquence (%)	12	20	52	20

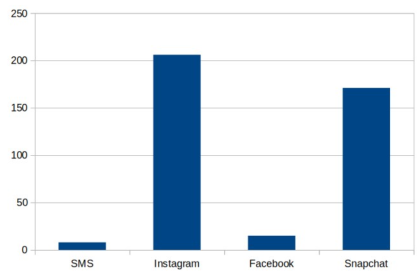
L'amplitude de classe est 10 cm : 1,50 – 1,40 = 0,10 m = 10 cm.

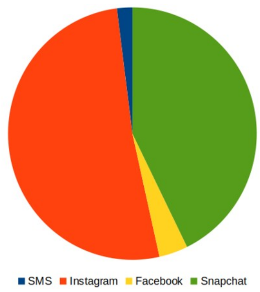
Diagrammes

Pour tracer un diagramme circulaire, on utilise la proportionnalité pour calculer les angles (angle total de 360 °)

	SMS	Instagram	Facebook	Snapchat	TOTAL
effectifs	8	206	15	171	400
Angle en °	7,2	185,4	13,5	153,9	360

Représentation : Diagramme en bâton — Diagramme circulaire





Etendue

Définition : **L'étendue** est la différence entre la plus grande valeur et la plus petite valeur d'une série.

Médiane

Définition : **La médiane** est un nombre qui partage cette série **en « deux séries de même effectif ».**

On range les valeurs de la série statistique **dans l'ordre croissant !**

Moyenne

Série sous forme de liste de valeurs	Série pondérée (avec des effectifs)
Moyenne = $\frac{Somme des valeurs}{effectif total}$	Moyenne = $\frac{Somme des produits des valeurs par leur effectif}{effectif total}$ Si c'est une série avec des classes, on prend comme valeur le milieu des classes.

Avec des exemples :

→ *Avec un effectif total impair*

Exemple 1 : Voici les températures relevées à 8h du matin chaque jour d'une semaine: 9° ; 10° ; 8° ; 13° ; 12° ; 13° ; 14°

→ Étendue : 14 – 9 = 5 ; L'étendue est donc 5°

Pour la médiane : on range dans l'ordre croissant et repère la valeur qui est au milieu : $\underbrace{\boxed{8\ ;9\ ;10}}_{\text{Effectif : 3}}$; 12 ; $\underbrace{\boxed{13\ ;13\ ;14}}_{\text{Effectif : 3}}$ → La médiane est : 12°

→ La moyenne : $M=\dfrac{9+10+8+13+12+13+14}{7}=\dfrac{79}{7}\approx 11{,}3°$ la moyenne est donc de 11,3°

→ *Avec un effectif total pair*

Exemple 2 : Voici les températures notées le premier jour de chaque mois d'une année : -2° ;1° ;3° ;8° ;12° ;12° ;16° ;18° ;16° ;10°; 5°; -1°
Quelle est la médiane de cette série de températures ?

Étendue : 18 - (-2) = 20 ; L'étendue est donc 20°

Pour la médiane : on range dans l'ordre croissant et repère les deux valeurs qui sont au milieu: $\underbrace{\boxed{-2;\ -1;\ 1;\ 3;\ 5;\ 8;}}_{\text{Effectif : 6}}$ $\underbrace{\boxed{10;\ 12;\ 12;\ 16;\ 16;\ 18}}_{\text{Effectif : 6}}$

Une médiane est donc : 9° (n'importe quel nombre entre 8 et 10 convient)

La moyenne : $M=\dfrac{-2+1+3+8+12+12+16+18+16+10+5+(-1)}{12}=\dfrac{98}{12}\approx 8{,}1$

la moyenne est donc 8,1°

Exemple 3 :

Voici le relevé des températures relevées à Tokyo à midi pour les jours du mois de mars :

Température (°C)	- 6	- 3	- 1	1	2	4	6	8	10	tot
Nombre de jours	3	5	7	1	3	4	5	1	2	31
Effectifs CUMULES	3	8	15	16	19	23	28	29	31	

Étendue : 10 - (-6) = 16 L'étendue est donc 16°C

Pour la médiane : On calcule les effectifs cumulés pour trouver la valeur au milieu : 1° (31 = 15 + 1 + 15 , c'est donc la 16eme valeur)

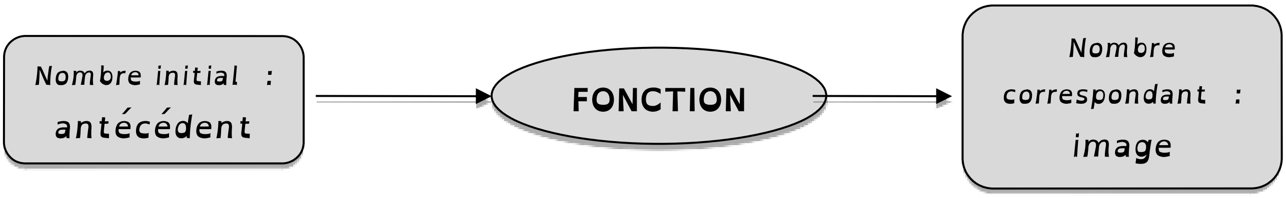
La moyenne : $M=\dfrac{-6\times 3+(-3)\times 5+(-1)\times 7+1\times 1+2\times 3+4\times 4+6\times 5+8\times 1+10\times 2}{31}$

$=\dfrac{41}{31}$ $M\approx 1{,}3$ La moyenne est donc 1,3°C

B-4-NOTION DE FONCTION

Définition et vocabulaire

Définition : Une **fonction** est un procédé mathématique qui, à un nombre, <u>fait correspondre</u> un nombre unique.



Les procédés permettant d'associer un nombre à un autre nombre peuvent être :→ Des formules mathématiques (par exemple : $f(x)=2x+5$)

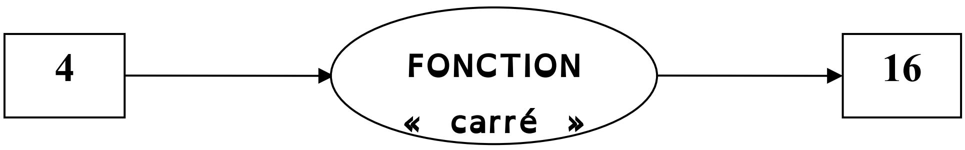
→ Une courbe (par exemple : la courbe donnant le cours d'une action en Bourse en fonction du temps)

→ Un instrument de mesure ou de conversion (par exemple : le compteur d'un taxi qui donne le prix en fonction du trajet parcouru)

→ Un tableau de valeurs, chaque élément de la seconde ligne étant associé à un élément de la première ligne

→ etc.

<u>Exemple :</u> L'outil mathématique qui, à un nombre, fait correspondre **son carré,** est une fonction :



Si on appelle f la fonction qui, à un nombre, fait correspondre son carré.
On dit que la fonction f est **la fonction** qui, à un nombre x, « **associe** » le nombre x^2 **.**

1ère notation possible : $f(x)= x^2$ f(x) **se lit « f de x »**
2ème notation possible : $f : x \longrightarrow x^2$

nombre initial : « antécédent »

nombre correspondant : « image »

Si le nombre initial est 4, le nombre correspondant est 16 (car $4^2 = 16$)
On note : $f(4)=16$ ou $f : 4 \longrightarrow 16$

On dit que :

→ 16 est **l'<u>image</u>** de 4 par la fonction f car $f(4)=4^2=16$

→ 4 est **un <u>antécédent</u>** de 16 par la fonction f

→ 4 est **aussi un antécédent** de 16 car $f(-4)=(-4)^2=(-4)\times(-4)=16$

→ **Le nombre 16 a deux antécédents : 4 et − 4.**

De la même manière, calculons les images de 3, de − 5 et de 0:

$f(3)=3^2=9$	$f(-5)=(-5)^2=25$	$f(0)=0^2=0$
L'image de 3 est 9.	**L'image de −5 est 25.**	**L'image de 0 est 0.**
3 est un antécédent de 9.	**−5 est un antécédent de 25.**	**0 est un antécédent de 0.**

<u>« tableau de valeurs »</u> :

- 4 et 4 sont des **<u>antécédents</u>** de 16 par la fonction .

ligne des antécédents

ligne des images

x	-5	-4	0	3	4
$f(x)$	25	16	0	9	16

25 est **<u>l'image</u>** de - 5 par la fonction

<u>Représentation graphique d'une fonction</u>

Pour tracer la représentation graphique d'une fonction f, on choisit <u>des nombres</u> au hasard et on calcule <u>leur image</u> par la fonction f.

On place **tous les points** de coordonnées $(x;f(x))$ dans un repère ce qui nous donne une idée de la courbe représentative de f.

Dans un repère, **la représentation graphique** d'une fonction f est l'ensemble **de tous les points de coordonnées** $(x;f(x))$, où x désigne un nombre.

abscisse **ordonnée**

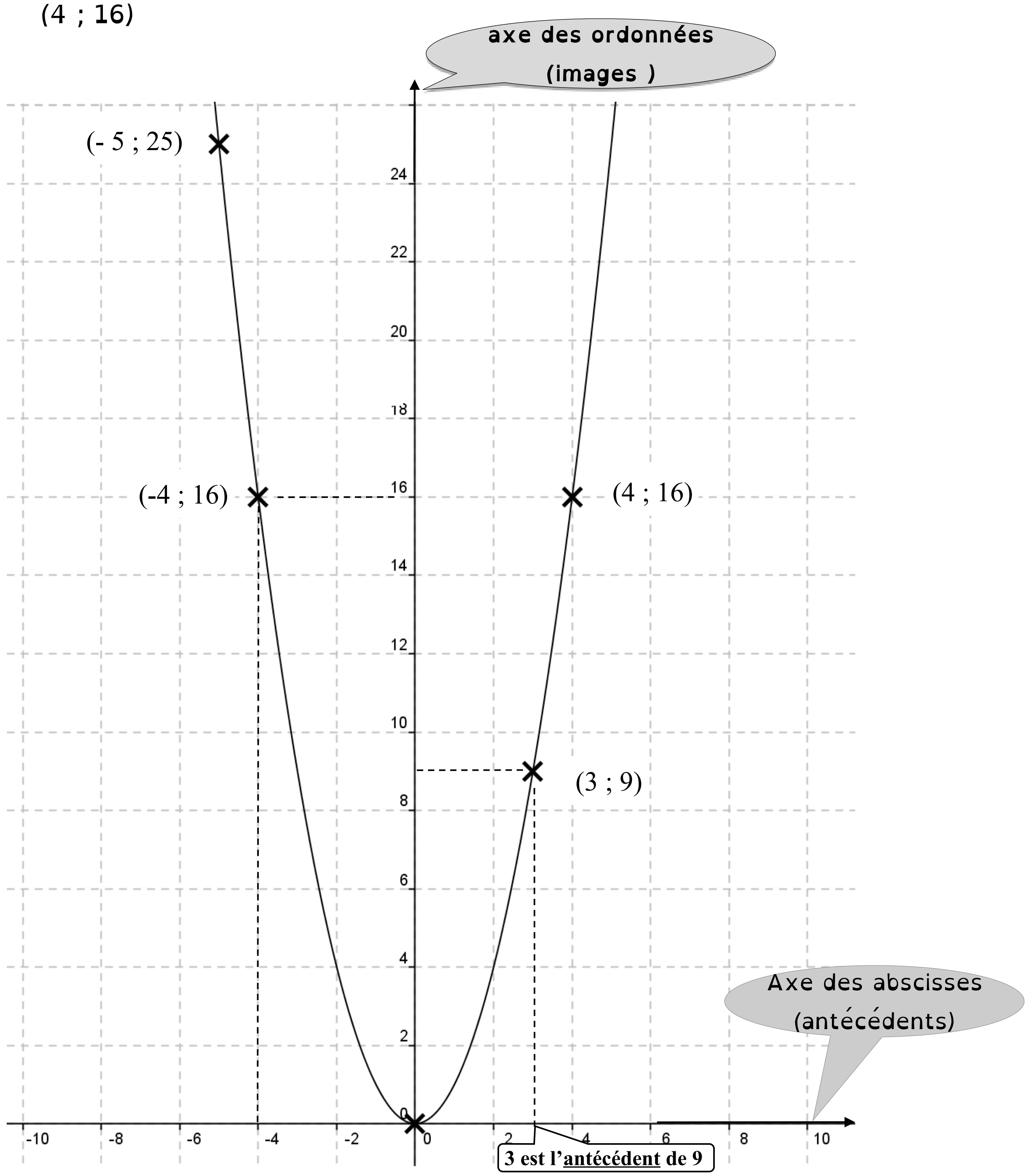
<u>Exemple :</u> **On va tracer la représentation graphique de la fonction f définie par $f: x \longmapsto x^2$.**

Pour cela, on réutilise le tableau de valeurs précédent :

ligne des antécédents	x	–5	– 4	0	3	4
ligne des images	$f(x)$ **ou** y	25	16	0	9	16

La **première colonne** de nombres donne le **premier point** à placer dans le repère : **(-5 ; 25)**

Les cinq colonnes de nombres de ce tableau donnent <u>cinq points à placer</u> dans le repère. Ils ont pour **coordonnées** : (–5 ; 25) (– 4 ; 16) (0 ; 0) (3 ; 9) (4 ; 16)



Définitions et notations

a et b sont des nombres relatifs.

Une **fonction affine** est de la forme : $x \rightarrow \text{a}\,x + \text{b}$.

- Si b = 0, c'est une **fonction linéaire** , elle est de la forme : $x \rightarrow \text{a}\,x$
- Si a = 0, c'est une **fonction constante** elle est de la forme : $x \rightarrow \text{b}$

Exemples :

Soit la fonction f telle que f : $x \rightarrow 2\,x - 3$

C' est une fonction affine avec a= 2 et b = - 3

Soit la fonction g telle que g(x) = - 3,5 x

C'est une fonction linéaire avec a = – 3,5.

Une situation Concrète :

Trois entreprises de location de matériel industriel louent des compresseurs aux tarifs suivants :

Tarif A : 45 € par jour.

Tarif B : 25 € par jour avec versement d'une caution non remboursable de 200 € le premier jour de location.

Tarif C : 750 € quelle que soit la durée de la location n'excédant pas 1 mois

En nommant x *le nombre de jours de location sur le mois, on a :*

Le prix p_A *avec le tarif A :* $p_A(x) = 45x$ *: C'est une fonction linéaire*

Le prix p_B *avec le tarif B :* $p_B(x) = 30x + 150$ *: C'est une fonction affine*

Le prix p_C *avec le tarif C :* $p_B(x) = 750$ *: C'est une fonction constante*

Nombre de jours de locations	8	15	30
Prix avec le tarif A :	360	675	1350
Prix avec le tarif B :	400	575	950
Prix avec le tarif C :	750	750	750

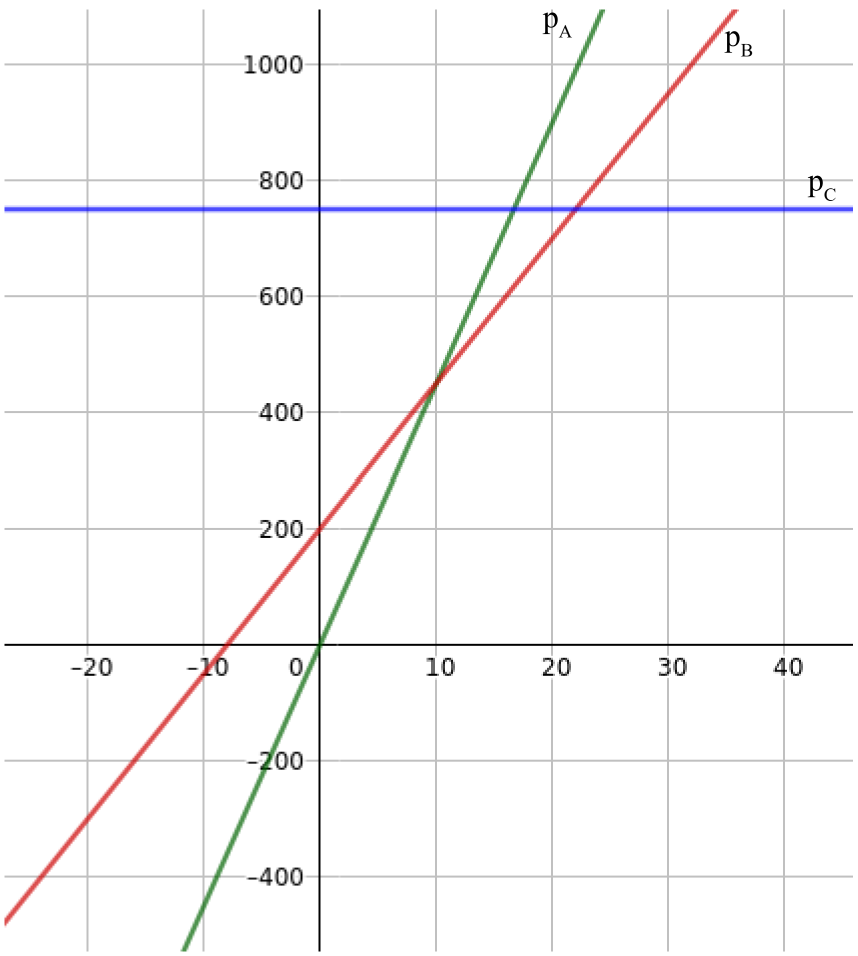
Représentations graphiques

Propriété : La représentation graphique d'une fonction affine est une droite : il suffit donc de deux points pour la tracer.

Cas particuliers : → La représentation graphique d'une fonction linéaire est une **droite passant par l'origine** : c'est la représentation d'une situation de **proportionnalité.**

→ La représentation graphique d'une fonction constante est une **droite parallèle à l'axe des abscisses.**

Revenons à l'exemple ci dessus, on obtient le graphique suivant :



Définition : Soit la fonction affine $x \to a\,x + b$:

a est appelé le **« coefficient directeur »** de la courbe représentative (c'est la pente de la droite)

b est l'ordonnée à l'origine .

Thème C

Grandeurs et mesures

Sommaire des leçons

C-1-Grandeurs et mesures proportionnelles *(Voir leçon B1)*

Échelle

Les dimensions sur un plan ou une carte sont proportionnelles aux dimensions réelles.

L'échelle du plan (ou de la carte) est le coefficient de proportionnalité qui permet d'obtenir les dimensions sur le plan à partir des dimensions réelles : $\text{échelle} = \dfrac{\text{dimensions sur le plan}}{\text{dimensions réelles}}$

où les dimensions doivent être exprimées dans la même unité.

Exemple : Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{25\,000}$, 1 cm sur la carte représente 25 000 cm sur le terrain : 4 cm sur la carte équivaut à :

4×25 000 = 100 000 cm = 1 km !

Vitesse

la vitesse moyenne est **le coefficient de proportionnalité** entre le temps et la distance.

Une **vitesse** est le **quotient** d'une distance par un temps :

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}}$$

Une **vitesse** s'exprime en général en **km/h** ou **km.h^{-1}** (kilomètre par heure

Exemple : Un automobiliste a parcouru 480 km en 4 h :

Sa vitesse moyenne est de : $\text{vitesse} = \frac{480}{4} = 120$ soit 120 km/h

Cela signifie qu'en moyenne, il parcourt 120 kilomètres en une heure.

Attention: cela ne veut pas dire qu'il roule toujours à la même vitesse!

Attention aux unités de temps :

Unités de temps	**1 h = 60 min** et 1 min = $\frac{1}{60}$ h	**1 min = 60 s** et 1 s = $\frac{1}{60}$ min	**1 h = 3600 s** et 1 s = $\frac{1}{3600}$ h

Exemple : Exprimer, en heure décimale, 15 minutes et 90 minutes :15 min = $\frac{15}{60}$ h = 0,25 h et 90 min = $\frac{90}{60}$ h = 1,5 h.

Agrandissement et réduction

Définition : On dit qu'un objet est un **agrandissement** ou une **réduction** d'un autre objet lorsque toutes leurs **longueurs sont proportionnelles.**

Propriété 1 : Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

→ Si $k>1$ alors c'est un **agrandissement.**

→ Si $k<1$, alors c'est une **réduction.**

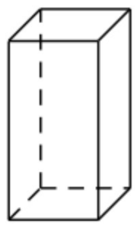
Propriété 2 : Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

Les longueurs sont multipliées par k

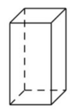
Les aires sont multipliées par k^2

Les volumes sont multipliés par k^3

Exemple :



Réduction de rapport $\frac{1}{4}$



Longueurs		Longueurs
Hauteur : 12 cm	$12\times\frac{1}{4}=3$	Hauteur : 3 cm
Largeur : 5 cm	$5\times\frac{1}{4}=1,25$	Largeur : 1,25 cm
Profondeur : 3 cm	$3\times\frac{1}{4}=0,75$	Profondeur : 0,75 cm

Aire (face devant) :

$12\times5=60\,cm^2$ $\qquad 60\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=3,75$

Aire (face devant) : 3,75 cm²

Volume :

$12\times5\times3=180\,cm^3$ $\qquad 180\times\left(\frac{1}{4}\right)^3=2,825$

Volume : 2,825 cm³

Thème D

Espace et géométrie

Sommaire des leçons

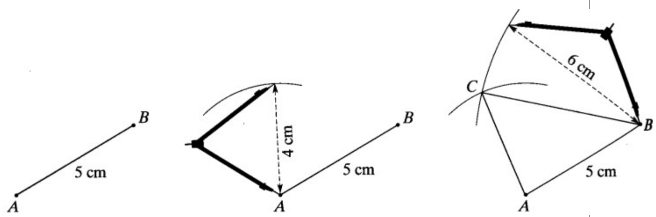
construction

a) Connaissant les mesures des trois côtés :

Illustration

Tracer un triangle ABC tel que :

AB=5 cm ; AC=4 cm et BC=6 cm.

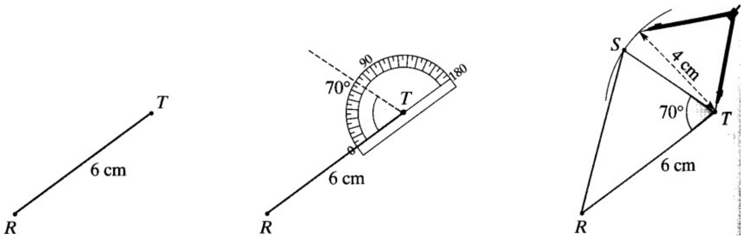


→ *Avec la règle graduée et le compas.*

Description : On trace un coté/ Avec le compas, on trace les deux arcs de cercles sécants

b) Connaissant les mesures de deux côtés et d'un angle

Illustration:Tracer un triangle RST tel que : RT =6 cm ; ST=4 cm et $\widehat{RTS}=70°$



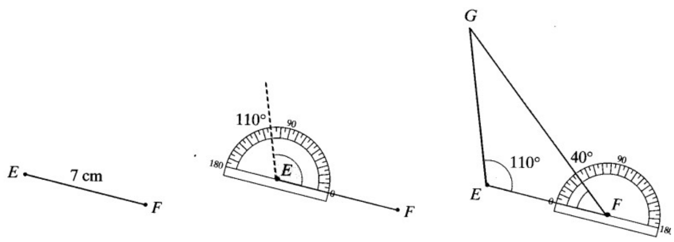
→ *Avec la règle graduée, le rapporteur , et le compas.*

Description :On trace un coté/ A l'aide du rapporteur, on trace la demi-droite portant le deuxième coté / Avec le compas, on trouve le 3eme sommet.

c) Connaissant les mesures d'un côté et des deux angles

Illustration: Tracer un triangle EFG tel que : EF=7 cm ; $\widehat{FEG}=110°$ et $\widehat{EFG}=40°$

→ *Avec la règle graduée et le rapporteur*



Description :On trace un coté/ A l'aide du rapporteur, on trace les deux demi-droites portant le deuxième et le troisième coté.

Propriétés

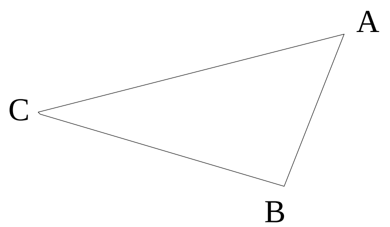
Somme des mesures des angles d'un triangle.

Propriété 1: **La somme** des mesures des trois angles d'un triangle est **toujours égale à 180°.**

preuve en exercice le ....

Inégalité triangulaire.

Propriété 2: Etant donné un triangle, chaque côté a une longueur inférieure à la somme des deux autres.



Les trois inégalités triangulaires, sont :

AB < AC + CB

AC < AB + BC

BC < BA + AB

Preuve : En activité le ....

Conséquence : Si l'une des trois inégalités n'est pas vérifiée, le triangle ne peut pas être tracé : le triangle n'est pas **constructible.**

En pratique, il suffit de vérifier si **le côté le plus long est inférieur à la somme des deux plus courts.**

Dans les exercices :

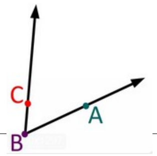
Exemple 1 : Le triangle RST est tel que $\widehat{RST}=64°$ et $\widehat{TRS}=93°$.
Calcule la mesure de l'angle $\widehat{STR}$.

je sais que la somme des trois angles d'un triangle est égale à **180°**,
donc : $\widehat{STR}=180-(64+93)=180-157=23°$

Exemple 2 : Un triangle dont les côtés mesurent 6cm, 4cm et 3cm est-il constructible ?

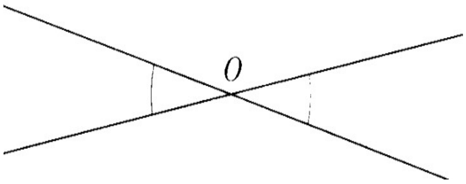
J'ajoute les deux plus petits côtés : 3 + 4 = 7
7 > 6, donc d'après l'inégalité triangulaire, le triangle est constructible.

D-2-ANGLES

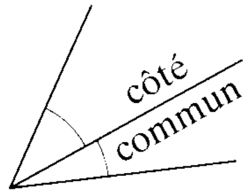


Vocabulaire

Définition 1 : Deux angles **opposés par le sommet** ont le même sommet et leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre.



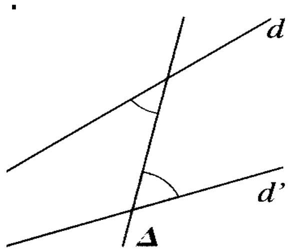
Définition 2 : Deux angles **adjacents** ont le même sommet et sont placés de part et d'autre d'un côté commun

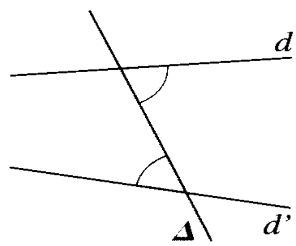


Deux droites coupées par une sécante forment des angles dont les sommets sont aux points d'intersection.

Définition 3 : Deux angles **alternes-internes** sont formés par deux droites coupées par une sécante et :

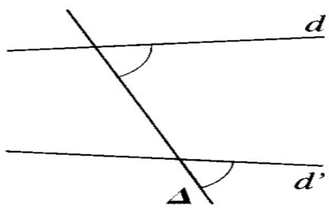
1. ils sont situés de part et d'autre de la sécante ;
2. ils sont situés entre les deux droites .
3. ils ne sont pas adjacents.

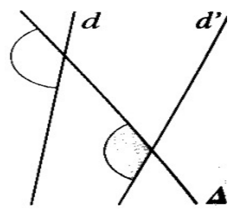




Définition 4 : Deux angles **correspondants** sont formés par deux droites coupées par une sécante et :

1. ils sont situés d'un même côté de la sécante ;
2. L'un est situés entre les deux droites et l'autre pas.

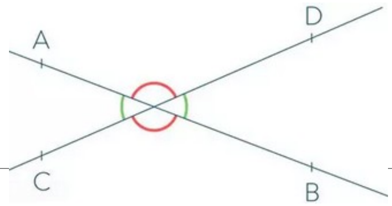




Propriétés

Propriété 1 : Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.

Preuve : Ils sont symétriques



Propriété 2 : Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors :

→ Les angles alternes-internes sont de même mesure

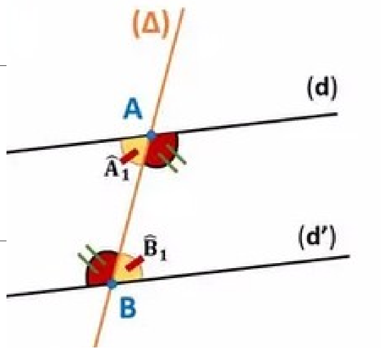
→ Les angles correspondants sont de même mesure

Preuve : Admise

Réciproquement :

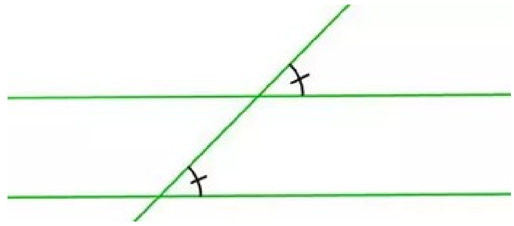
Propriété 3 : Si deux droites coupées par une sécante, forment deux angles alternes-internes de même mesure alors elles sont parallèles.

Preuve : Admise



Propriété 4 : Si deux droites coupées par une sécante, forment deux angles correspondants de même mesure alors elles sont parallèles.

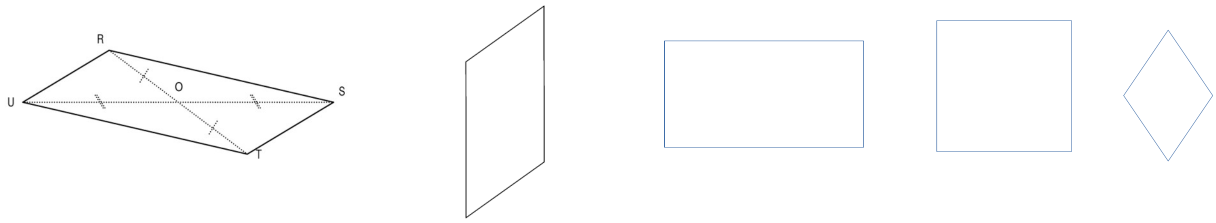
Preuve : Admise



D-3-PARALLÉLOGRAMMES

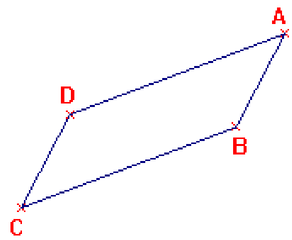
DÉFINITION ET VOCABULAIRE

Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont **les côtés opposés sont deux à deux parallèles.**



Parallélogrammes quelconques *Parallélogrammes particuliers*

Le parallélogramme ci-contre s'appelle ABCD ou DCAB ou ...



Les points A, B, C et D sont **les sommets**

A et C sont **opposés** ; A et B sont **consécutifs**

Les segments [AB], [BC], [CD] et [DA] sont **les côtés**

[AB] et [DC] sont **opposés** ; [AB] et [BC] sont **consécutifs**

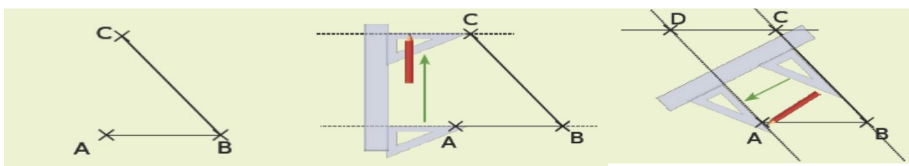
Les segments [AC] et [DB] sont **les diagonales** du parallélogramme.

Le point d'intersection des diagonales s'appelle le **centre du parallélogramme.**

CONSTRUCTION

Avec 3 points A,B,C donnés, comment construire le parallélogramme ABCD ?

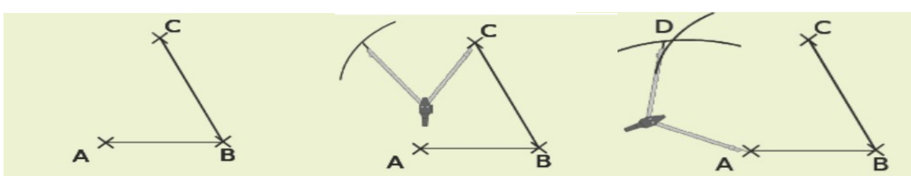
<u>A la règle et à l'équerre</u>, en traçant des parallèles :



1) On Trace la parallèle à (AB) passant par C.

2) On Trace la parallèle à (BC) passant par D.

Au compas :



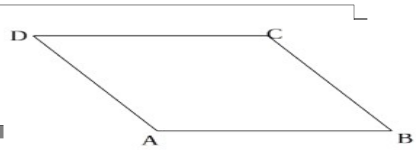
1) On reporte la longueur AB à partir du point C.

2)On reporte la longueur BC à partir du point A.

Propriétés du parallélogramme

Un parallélogramme est un quadrilatère qui possède **un centre de symétrie** : c'est le point d'intersection de ses diagonales.

Exemple : ABCD est un parallélogramme,placer le centre de symétrie O de ABCD.



Si un quadrilatère est un **parallélogramme,**

- **alors** ses côtés opposés sont **deux à deux de même longueur.**
- **alors** ses diagonales **se coupent en leur milieu.**
- **alors** ses angles opposés sont **deux à deux de même mesure .**

Preuves : Ces propriétés découlent de la définition et des propriétés de la symétrie centrale.

Reconnaître un parallélogramme

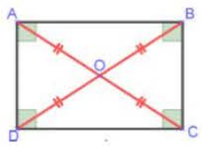
(Pour montrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme)

- Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux parallèles,
- Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur,
- Si un quadrilatère <u>*non croisé*</u> a deux côtés opposés parallèles et de même longueur,
- Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu,
- Si un quadrilatère a ses angles opposés deux à deux de même mesure,

Alors, c'est un parallélogramme

PARALLÉLOGRAMMES PARTICULIERS

Le rectangle



Définition : Un **rectangle** est un quadrilatère qui a **quatre angles droits**.

a) Propriétés du rectangle

Si un quadrilatère est un **rectangle**,

alors c'est un **parallélogramme** (il vérifie toutes les propriétés du parallélogramme)

alors ses **diagonales** sont de **même longueur** et se **coupent en leur milieu.**

b) Reconnaître un rectangle *(Pour montrer qu'un quadrilatère est un rectangle)*

Si un quadrilatère a quatre angles droits,

Si un quadrilatère a des diagonales de même longueur et qui se coupent en leur milieu

alors c'est un rectangle.

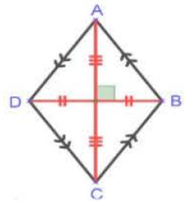
Si c'est un **parallélogramme**, on peut utiliser une des deux propriétés suivantes :

Si un parallélogramme a un angle droit,

Si un parallélogramme a des diagonales qui sont de même longueur,

alors c'est un rectangle.

Le Losange



Définition : Un **losange** est un quadrilatère qui a **quatre côtés de même longueur.**

a) Propriétés du losange

Si un quadrilatère est un **losange**,

alors c'est un **parallélogramme** (il vérifie toutes les propriétés du parallélogramme)

alors ses **diagonales** sont **perpendiculaires** et se **coupent en leur milieu.**

b) Reconnaître un losange *(Pour montrer qu'un quadrilatère est un losange)*

Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur,

Si un quadrilatère a des diagonales perpendiculaires et qui se coupent en leur milieu,

alors c'est un losange.

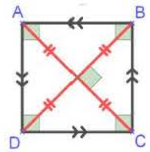
Si c'est un **parallélogramme**, on peut utiliser une des deux propriétés suivantes :

Si un parallélogramme eux côtés consécutifs de même longueur

Si un parallélogramme a des diagonales perpendiculaires

alors c'est un losange.

Le carré



Définition : Un **carré** est un quadrilatère qui a **quatre côtés de même longueur** et **quatre angles droits.**

a) Propriétés du losange

Si un quadrilatère est un **carré**,

alors c'est un **parallélogramme** (il vérifie toutes les propriétés du parallélogramme)

alors c'est un **rectangle** (il vérifie toutes les propriétés du rectangle)

alors c'est un **losange** (il vérifie toutes les propriétés du losange)

b) Reconnaître un carré

On pourrait en écrire toute une liste…Voici les deux plus utiles :

Si un quadrilatère a quatre côtés de même longueur et quatre angles droits,

Si un quadrilatère a des diagonales perpendiculaires, de même longueur et qui se coupent en leur milieu,

alors c'est un carré.

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

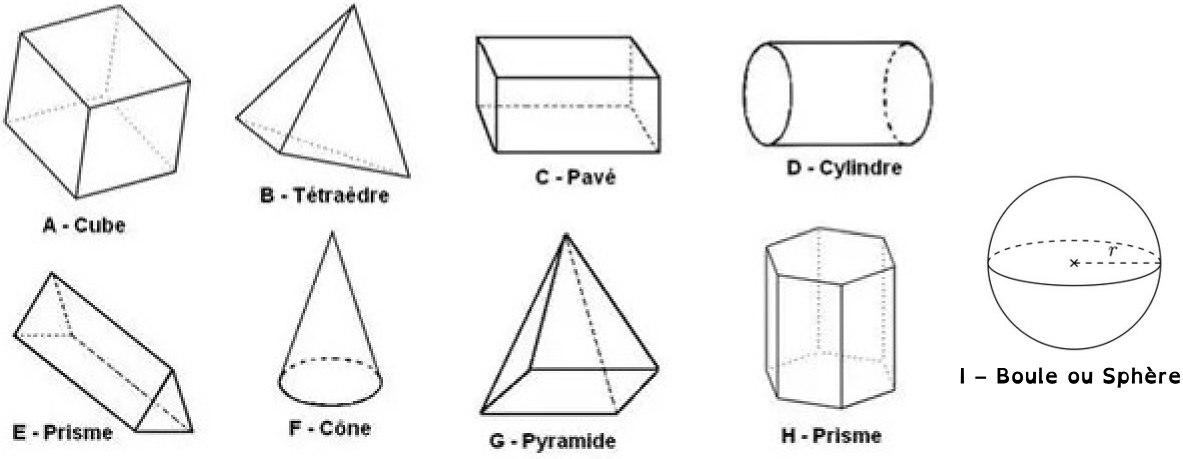
……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

D-5- SOLIDES

Solides usuels

C’est un " objet géométrique " à trois dimensions



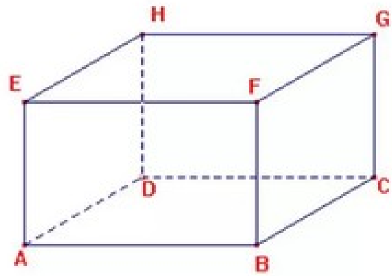
Pavé droit ou parallélépipède rectangle

Définition : Un pavé droit est un solide qui a 6 faces rectangulaires.

Perspective cavalière :

→ Les arêtes cachées sont en pointillés.

→ Les faces ne sont pas en vraies grandeur.



Caractéristiques:

Un pavé droit à 12 arêtes et 8 sommets.

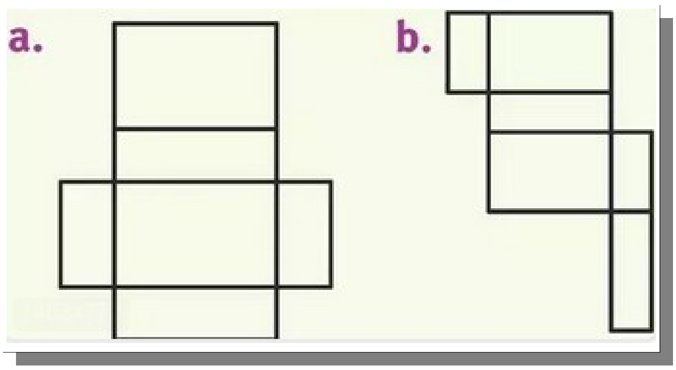
On le nomme par ses sommets : le pavé ci-dessus s’appelle ABCDEFGH

Cas particulier :

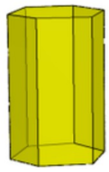
Un pavé dont toutes les faces sont des carrés est **un cube.**

Patron d’un pavé droit :

→ Les faces sont tracées à plat, en vraie grandeur.



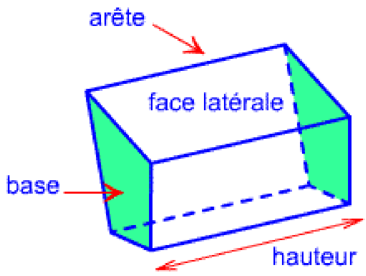
Prismes droits



Définition : Un **prisme droit** est un solide avec :

- deux **faces parallèles et superposables** qui sont des **polygones** : ce sont **les bases.**
- d'autres faces qui sont des **rectangles :** ce sont **les faces latérales.**

Remarque : Le cube, le pavé droit (ou parallélépipède rectangle) sont des prismes droits particuliers : .



Représentation en perspective cavalière :

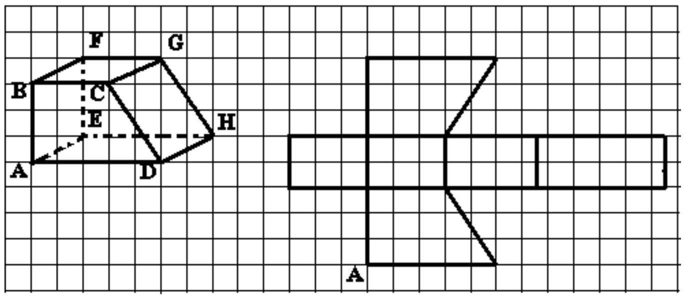
→ Les arêtes cachées sont en pointillés.

→ Les faces ne sont pas en vraies grandeur.

Patron d'un prisme droit :

→ Les faces sont tracées à plat, en vraie grandeur.

Replace le nom des sommets et le codage sur le patron :



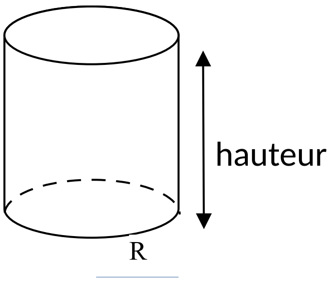
Cylindres de révolution

Définition : Un **cylindre de révolution** est un solide avec :

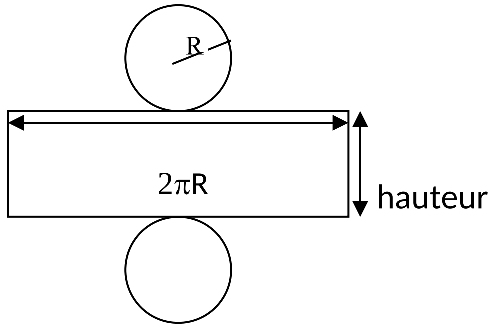
- deux **faces parallèles et superposables** qui sont des **disques : ce sont les bases**
- une **face latérale** qui, dépliée, a la forme d'un **rectangle.**

Représentation en perspective cavalière

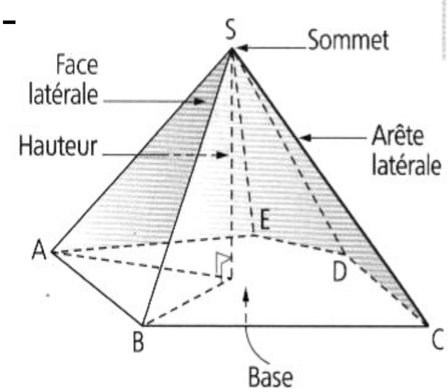
Les disques sont représentés par des ovales sur le dessin en perspective



patron d'un cylindre :



Pyramides



Une pyramide est un solide avec :

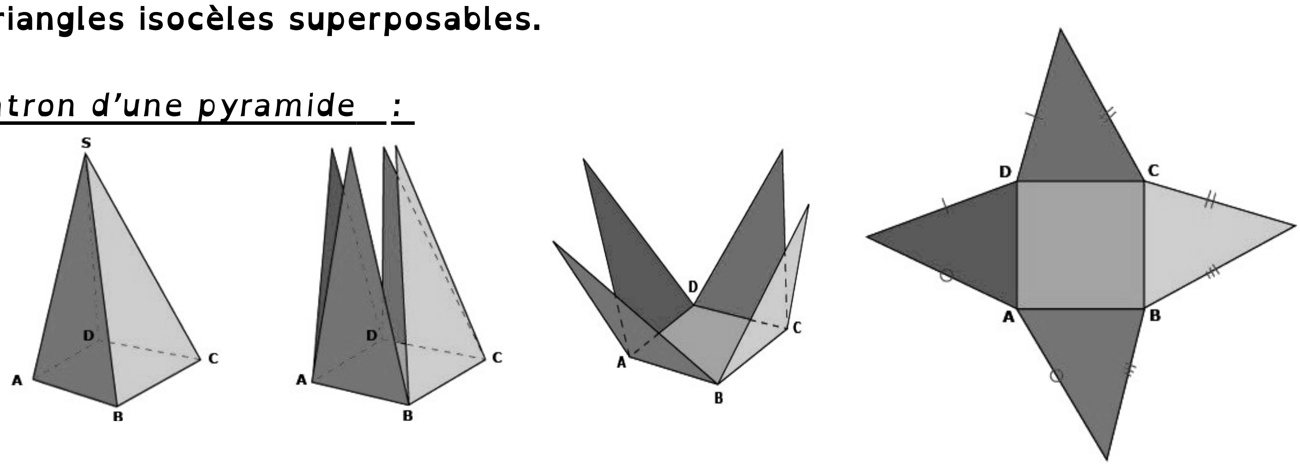
- une face qui est un polygone : C'est <u>la base</u> de la pyramide.
- les autres faces sont des triangles : ce sont <u>les faces latérales</u>

<u>La hauteur :</u> C'est le segment (ou sa longueur) issu du sommet de la pyramide et qui est perpendiculaire à la base de la pyramide.

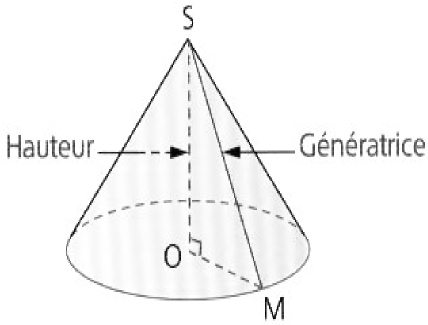
<u>Une **pyramide régulière**</u> a sa base qui est un **polygone régulier.**

<u>Propriété :</u> Les faces latérales d'une pyramide régulières sont des **triangles isocèles superposables.**

<u>Patron d'une pyramide :</u>



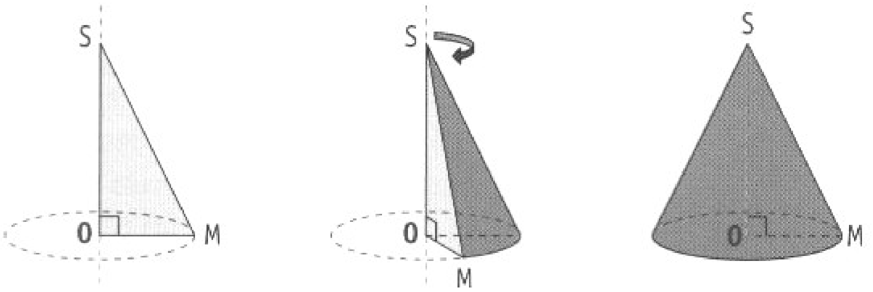
Cônes de révolution



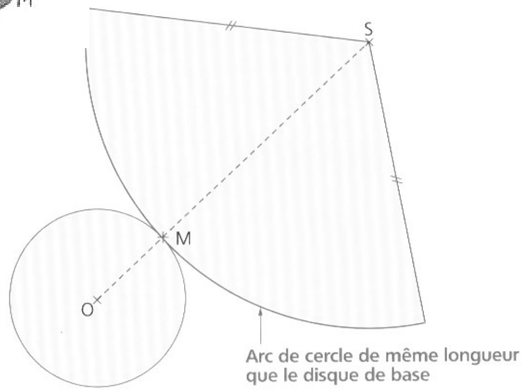
<u>Définitions :</u> → Un **<u>cône de révolution</u>** est un solide généré par un **triangle rectangle en rotation** autour de l'un des côtés de son angle droit.

→ L'**hypoténuse** du triangle rectangle est **<u>une génératrice</u> du cône.**
→ **La <u>base</u>** du cône de révolution est **un disque.**
→ **La <u>hauteur</u>** du cône de révolution est le segment (ou sa longueur) qui joint **le centre** de ce disque au **sommet** du cône : cette hauteur est **perpendiculaire** au disque de base.

Représentation d'un cône de révolution en perspective cavalière :



Le triangle SOM est rectangle en O, son hypoténuse est [SM].



Patron d'un cône de révolution :

Le patron d'un cône de révolution est constitué d'un **disque** qui représente la base du cône et d'une **portion de disque** qui représente la surface latérale.

Pour pouvoir « fermer » le patron et former le cône, il faut que la longueur du cercle de base soit égale à la longueur de l'arc de cercle de la surface latérale.

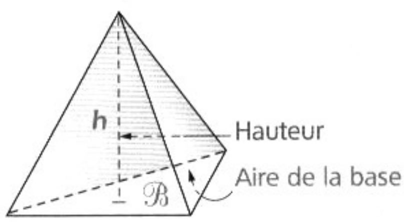
Calculs de volumes :

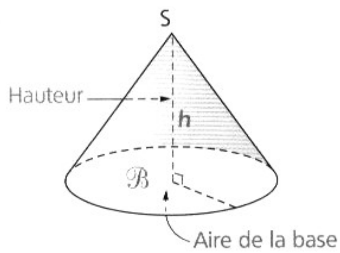
Le **volume d'un prisme droit ou d'un cylindre de révolution** est le produit de sa hauteur par l'aire d'une de ses bases :

$V = Aire\,de\,la\,base \times hauteur = B \times h$

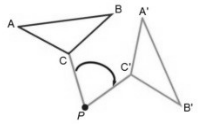
Pour **calculer le volume d'une pyramide ou d'un cône** de révolution, on utilise la formule suivante :

$$V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{B \times h}{3}$$





Rappel : Aire d'un disque de rayon r : $\boldsymbol{A} = \pi r^2$

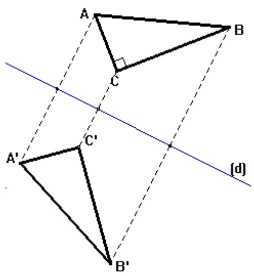


D-6-TRANSFORMATIONS DU PLAN

<u>Une transformation</u> est un procédé qui, à une figure, **<u>fait correspondre</u>** une autre figure, appelée **<u>son image</u>**.

<u>LA SYMÉTRIE AXIALE</u>

Deux figures sont **symétriques** par rapport à **un axe** si elles se superposent lorsqu'on plie le long de cet axe. Les mesures de la figure initiale sont conservées.

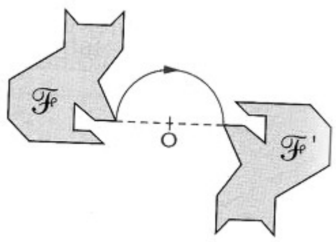


Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la symétrie d'axe la droite (d).

<u>Construction :</u> → Avec l'équerre et la règle graduée
→ Au compas

<u>LA SYMÉTRIE CENTRALE</u>

Deux figures sont **<u>symétriques</u>** par rapport **<u>à un point</u>** si elles se superposent après **<u>un demi-tour</u>** autour de ce point appelé **<u>le centre de la symétrie</u>.** Les mesures de la figure initiale sont conservées.

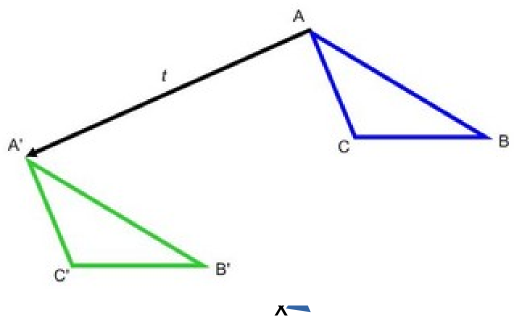


Sur la figure ci-contre, la figure F' est l'image de F par la symétrie de centre O.

<u>Construction :</u> → Avec la règle graduée.
→ Avec la règle et le compas.

<u>LA TRANSLATION</u>

Une translation est le déplacement ou le glissement d'une figure dans une **direction** donnée, un **sens** donné et une **longueur** donnée. Les mesures et l'orientation de la figure initiale sont conservées.

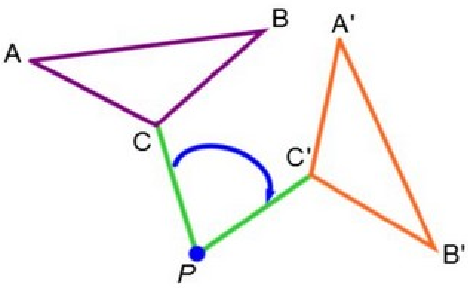


Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la translation qui transforme M en N.

<u>Construction :</u> Au compas, pour tracer A', on trace le parallélogramme AMNA'.

LA ROTATION

Une rotation est le déplacement circulaire d'une figure selon un **angle** donné autour d'un point (appelé **centre de rotation**). Les mesures de la figure initiale sont conservées.

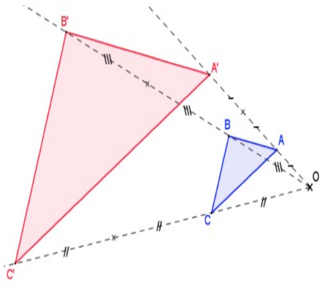


Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par la rotation de centre P et d'angle $\widehat{CPC'}$

Construction : → Avec un rapporteur et un compas.

L'HOMOTHÉTIE

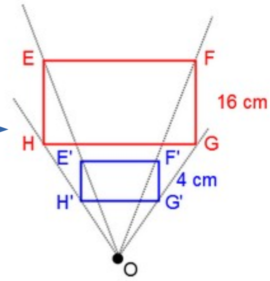
Une homothétie est une transformation géométrique qui agrandit ou qui réduit une figure tout en conservant sa forme initiale. Elle est définie par un **centre et un rapport.**



Sur la figure ci-contre, le triangle A'B'C' est l'image de ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 3. (Le rapport est superieur à 1, donc c'est un agrandissement)

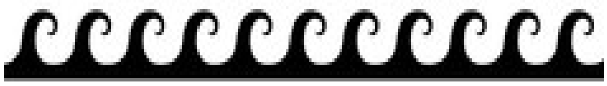
Sur la figure ci-contre, le rectangle A'B'C'D' est l'image de ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{4}$.

(c'est une réduction)



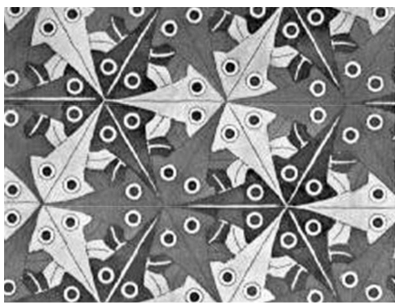
PAVAGES ET FRISES

Une frise est une bande de plan dans laquelle un motif se répète régulièrement. Chaque vague est l'image par translation de celle qui précède.



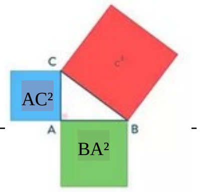
Un pavage est une portion de plan dans laquelle un motif se répète régulièrement .

Sur le pavage ci-contre, plusieurs transformations sont utilisées : Rotation, symétrie axiale et translation.



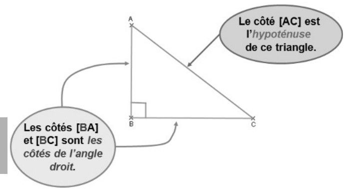
Oeuvre de Maurits Cornelis Escher

D-7-THÉORÈME DE PYTHAGORE



Rappel de vocabulaire : Dans un triangle rectangle, le côté opposé au sommet de l'angle droit s'appelle **l'hypoténuse.**

Les deux autres s'appellent les **côtés de l'angle droit.**



Carré et racine carrée

Carré d'un nombre : $a^2 = a \times a$

Racine carrée d'un nombre positif x : c'est le nombre positif qui a pour carré x. On le note $\sqrt{x}$

Exemples : $\sqrt{9}=3$ car $3^2 = 9$ et $3 > 0$ $\sqrt{25}=5$ car $5^2 = 25$ et $5 > 0$

$\sqrt{41}\approx 6{,}4$ mais $6{,}4^2 = 40{,}96$; par contre $\left(\sqrt{41}\right)^2=41$

Théorème de Pythagore

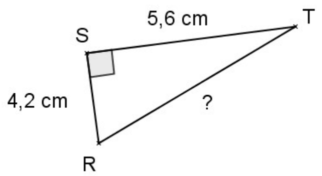
Si un triangle est **rectangle,** alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.**

Preuve : **En activité le ....**

1ᵉʳ exemple: *Calcul de la longueur de l'hypoténuse.*

Soit RST un triangle rectangle en S tel que RS = 4,2 cm et ST = 5,6 cm. Calculer RT.

On sait que le triangle RST est rectangle



en S, donc d'après le théorème de Pythagore

$RT^2 = RS^2 + ST^2 = 4{,}2^2 + 5{,}6^2 = 49$

Ainsi $RT=\sqrt{49}=7$ *Donc [RT] mesure 7 cm.*

2ème Exemple : *Calculer la longueur d'un côté de l'angle droit.*

Soit KLM rectangle en L tel que KL = 3 cm et KM = 5,5 cm. Calculer LM.

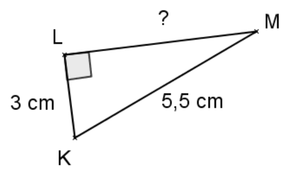
KLM est rectangle en L, donc d'après le théorème de Pythagore

[KM] est l'hypoténuse

$KM^2 = KL^2 + LM^2$

$5{,}5^2 = 3^2 + LM^2$

$30{,}25 = 9 + LM^2$



Ainsi : $LM^2 = 30{,}25 - 9 = 21{,}25$ *et*

$LM=\sqrt{21{,}25}\approx 4{,}6$

Donc le segment [LM] mesure environ 4,6 cm.

<u>Une conséquence du théorème de Pythagore :</u> **la contraposée**

Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

<u>Exemple d'application de la contraposée :</u>

Soit un triangle BON tel que BO = 4,5 cm ; ON = 6 cm et BN = 7,4 cm.
Démontrer que le triangle BON n'est pas un triangle rectangle.

Dans le triangle BON, [BN] est le plus grand côté.

On calcule <u>séparément :</u> D'une part $BN^2 = 7{,}4^2 = 54{,}76$;

d'autre part : $BO^2 + ON^2 = 4{,}5^2 + 6^2 = 56{,}25$

On constate que $BN^2 \neq BO^2 + ON^2$, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le <u>triangle BON</u> **<u>n'est pas un triangle rectangle</u>**

<u>Réciproque du théorème de Pythagore</u>

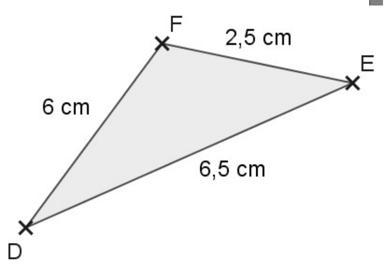
Si, dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

<u>Utilisation</u> : La réciproque du théorème de Pythagore sert **à démontrer qu'un triangle est rectangle.**

<u>Preuve :</u> Admise, elle sera développée en 3eme.

<u>Exemple d'application de la réciproque :</u>

Soit un triangle DEF tel que DE = 6,5 cm ; DF = 6 cm et EF = 2,5 cm.
Démontrer que le triangle DEF est rectangle.

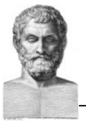


Dans le triangle DEF, [DE] est le plus grand côté.

On calcule <u>séparément :</u> D'une part $DE^2 = 6{,}5^2 = 42{,}25$;

d'autre part : $DF^2 + FE^2 = 6^2 + 2{,}5^2 = 42{,}25$

On constate que $DE^2 = DF^2 + FE^2$, donc d'après la contraposée du théorème de Pythagore, le <u>triangle DEF est rectangle en F</u>



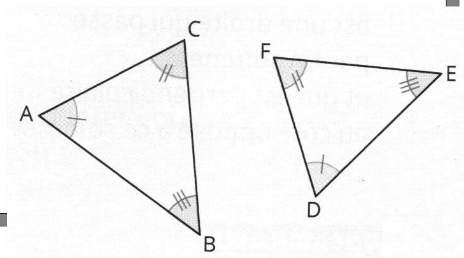
D-8-Le théorème de Thalès et sa réciproque

I-

Triangles semblables, agrandissement et réduction

<u>*Définition*</u> : Deux triangles **<u>semblables</u>** sont deux triangles ayant les **<u>mêmes mesures d'angles</u>**.

<u>Exemple</u> :
Les deux triangles ABC et DEF sont semblables car ils ont les mêmes mesures d'angles : $\widehat{BAC}=\widehat{FDE}$; $\widehat{BCA}=\widehat{DFE}$; $\widehat{ABC}=\widehat{FED}$



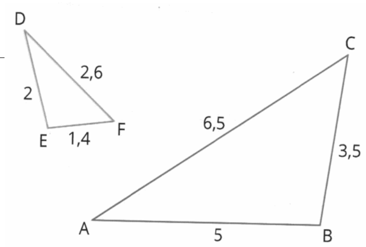
Dans cet exemple, le triangle ABC est plus grand que DEF :
on dit que le triangle ABC est un agrandissement du triangle DEF, ou encore que le triangle DEF est une réduction du triangle ABC.

<u>*Propriété 1*</u>: Si deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, alors les deux triangles sont semblables

Preuve : En exercice (utilise la somme des 3 angles d'un triangle)

<u>Propriété 2:</u> Si les longueurs d'un triangle sont proportionnelles aux longueurs d'un autre triangle, alors ces deux triangles sont semblables.

Preuve : Admise



Exemple :
Les deux triangles ABC et DEF ont leurs longueurs proportionnelles,donc ils sont semblables.
(Leurs angles ont donc la même mesure)

$\times 0,4$

longueurs de DEF	1,4	2	2,6
longueurs de ABC	3,5	5	6,5

Coefficient de réduction : $\dfrac{petite longueur}{grande longueur}=0,4$

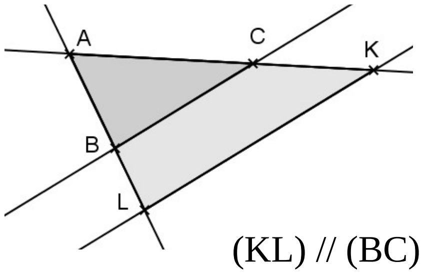
Coefficient d'agrandissement $\dfrac{grande longueur}{petite longueur}=2,5$

<u>Propriété 2:</u> Réciproquement, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs d'un des deux triangles sont proportionnelles aux longueurs de l'autre triangle.

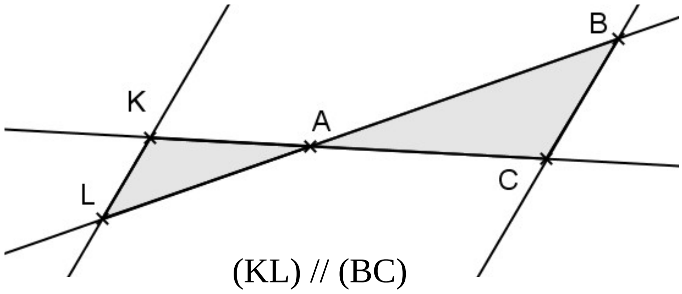
Preuve : Admise

Théorème de Thalès

Voici les deux configurations possibles avec lesquelles on peut utiliser le théorème de Thalès :



(KL) // (BC)



(KL) // (BC)

configuration « triangles emboîtés » configuration « papillon »

Théorème de Thalès : Soient deux droites (CK) et (BL) sécantes en A. **Si les droites (BC) et (KL) sont parallèles,** alors les égalités suivantes sont vraies : $\frac{AB}{AL}=\frac{AC}{AK}=\frac{BC}{LK}$ ←longueurs du triangle ABC ← longueurs du triangle ALK (« égalités de Thalès »)

Preuve : En exercice le.......................................

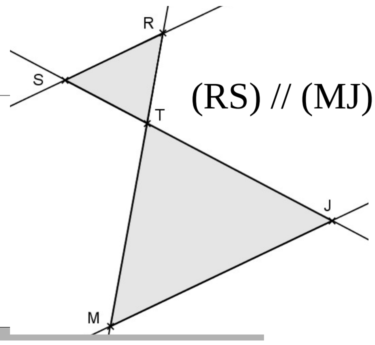
Première utilisation : Le théorème permet de *calculer une longueur* dans l'une des deux configurations ci-dessus.

II-

Exemple 1 : On donne la figure avec les longueurs suivantes :

TR = 6 cm ; TS = 2, 5 cm ; TJ = 4,5 cm ; JM = 7,2 cm.

Calculer SR et TM.



(RS) // (MJ)

Réponse: Je sais que → (SJ) et (RM) sont sécantes en T

→ Les droites (RS) et (MJ) sont parallèles, donc

d'après le théorème de Thalès: $\frac{TS}{TJ}=\frac{TR}{TM}=\frac{SR}{MJ}$ *d'où* $\frac{2,5}{4,5}=\frac{6}{TM}=\frac{SR}{7,2}$

Ainsi $TM=\frac{6\times 4,5}{2,5}=10,8\text{cm}$ *et* $SR=\frac{7,2\times 2,5}{4,5}=4\text{cm}$

Utilisation 2 : Le théorème de Thalès (plus précisément sa *contraposée*) permet de montrer que *deux droites ne sont pas parallèles.*

On travaillera cette utilisation en même temps que l'on étudiera la réciproque du théorème de Thalès : voir les exercices.

Réciproque du théorème de Thalès

Réciproque du théorème de Thalès :

Soient deux droites (BL) et (CK) sécantes en A.

Si les points A, B, L et les points A, C, K sont alignés dans le même ordre **et** Si les quotients $\frac{AB}{AL}$ et $\frac{AC}{AK}$ sont égaux , alors les droites (BC) et (LK) sont parallèles.

Preuve : En exercice le ....

Utilisation : La réciproque du théorème de Thalès permet de **démontrer que des droites sont parallèles.**

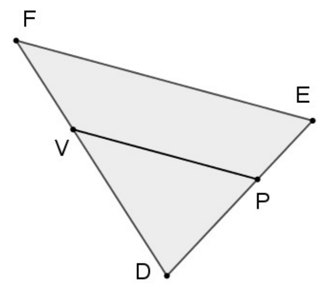
Exemple :

DEF est un triangle tel que :

DE = 8 cm ; DF = 6 cm

Les points P et V sont respectivement des points de [DE] et [DF] tels que DP = 5,6 cm et DV = 4,2 cm.

Démontrer que (PV) // (EF).



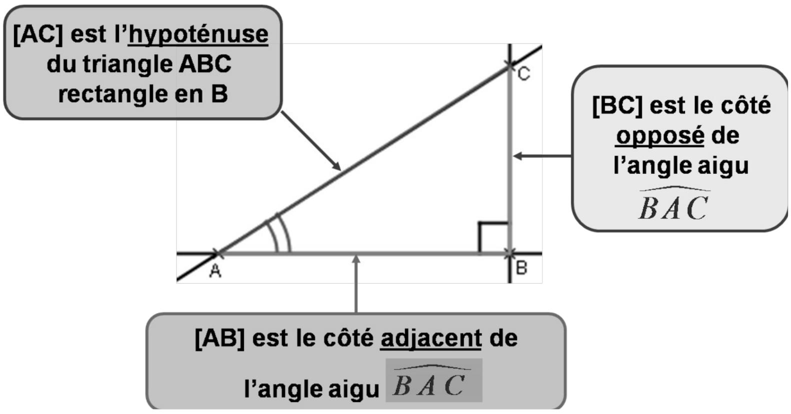
Réponse : Je sais que les point F,V, D et E,P,D sont alignés dans le même ordre.

On a : $\frac{DV}{DF}=\frac{4,2}{6}=\frac{7}{10}$ *et* $\frac{DP}{DE}=\frac{5,6}{8}=\frac{7}{10}$ *. Je constate que* $\frac{DV}{DF}=\frac{DP}{DE}$

donc les droites (VP) et (FE) sont parallèles.

La trigonométrie permet d'établir des relations entre les mesures d'angles et les longueurs des côtés d'un triangle rectangle.

Vocabulaire



Remarque : Si on s'intéresse à l'angle de sommet C, [BC] devient le côté adjacent et [AB] le côté opposé.

Les formules de trigonométrie

Pour un triangle ABC rectangle en B :

- **Cosinus** de l'angle $\widehat{BAC}$: $\dfrac{\text{longueur de l' \textbf{Adjacent} à l'angle } \widehat{BAC}}{\text{longueur de \textbf{l'Hypoténuse}}} = \dfrac{AB}{AC}$
- **Sinus** de l'angle $\widehat{BAC}$: $\dfrac{\text{longueur de l' \textbf{Opposé} à l'angle } \widehat{BAC}}{\text{longueur de \textbf{l'Hypoténuse}}} = \dfrac{BC}{AC}$
- **Tangente** de l'angle $\widehat{BAC}$: $\dfrac{\text{longueur de l' \textbf{Opposé} à l'angle } \widehat{BAC}}{\text{longueur del' \textbf{Adjacent} à l'angle } \widehat{BAC}} = \dfrac{BC}{AB}$

CAH SOH TOA

Propriété : Le cosinus et le sinus d'un angle aigu est un nombre compris être 0 et 1

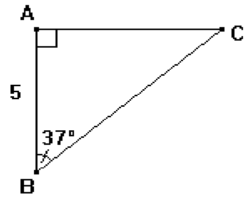
Preuve : ....

....

Utilisations

Vérifier que la calculatrice est en **mode "degré" (le symbole "D" ou "DEG" doit être écrit sur l'écran) !**

1-Pour calculer une longueur :



Exemple : *Soit ABC un triangle rectangle en A.*
On donne AB = 5 cm et $\widehat{ABC}$*= 37 °.* ***Calculer BC.***

Méthode : *On repère :L'angle connu :* $\widehat{BAC}$

Le côté connu : [AB] → Adjacent à $\widehat{BAC}$ *(→ A)*

Le côté cherché : [BC] → Hypoténuse (→ H)

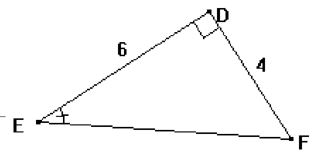
Donc on utilise la la formule du cosinus ! *(formule avec Adjacent et Hypoténuse)*

Rédaction de la réponse :

Je sais que le triangle ABC est rectangle en A.J'utilise la trigonométrie :

on a : $\cos(\widehat{BAC})=\frac{AB}{BC}$ donc $\cos(37)=\frac{5}{BC}$ et $BC=5\times\cos(37)\approx 4\,cm$

2-Pour calculer la mesure d'un angle :



Exemple : *Soit DEF un triangle rectangle en D.*
On donne DE = 6 cm et DF = 4 cm. ***Calculer la mesure de l'angle*** $\widehat{FED}$

Méthode : *On repère :L'angle cherché :* $\widehat{\mathrm{DEF}}$

Les côtés connus : [DE] → Adjacent à $\widehat{\mathrm{DEF}}$ *(→ A)*

[DF] → Opposé à $\widehat{\mathrm{DEF}}$ *(→ O)*

Donc on utilise la la formule de la tangente ! *(formule avec Adjacent et Opposé)*

Je sais que le triangle DEF est rectangle en D.J'utilise la trigonométrie :

on a : $\tan(\widehat{\mathrm{DEF}})=\frac{DF}{DE}$ donc $\tan(\widehat{\mathrm{DEF}})=\frac{4}{6}$ et $\widehat{(\mathrm{DEF})}\approx 33{,}7\,°$

Sphères et boules

1) Définitions

O est un point de l'espace, et r un nombre positif donné.

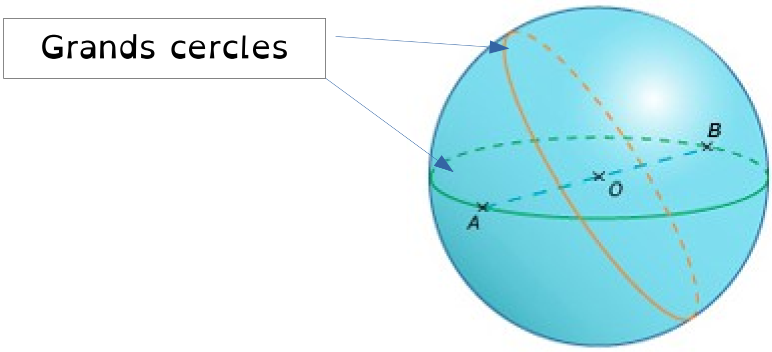
La <u>**sphère**</u> de centre **O** et de rayon *r* est **l'ensemble des points** de l'espace **situés à une distance de O égale à r.** *(creux)*

La <u>**boule**</u> de centre **O** et de rayon R est **l'ensemble des points** de l'espace **situés à une distance de O inférieure ou égale à r.** *(plein)*

*Un <u>grand cercle</u> de la sphère est **un cercle de centre O et de rayon r.***

<u>Exemple :</u>

[AB] est un diamètre de la sphère : AB = 2 x AO



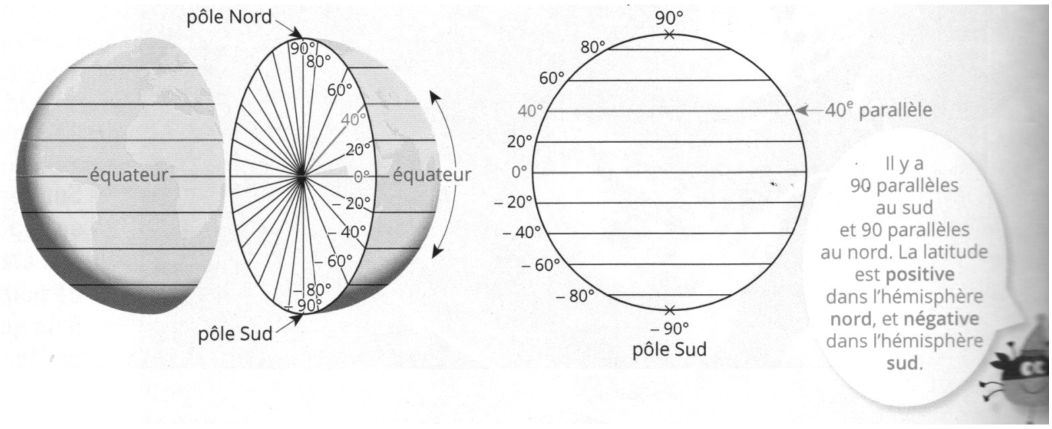
2) Aire d'une sphère et volume d'une boule

L'aire d'une sphère de rayon R est :	$A_{sphère} = 4\pi R^2$
Le volume d'une boule de rayon R est :	$V_{boule} = \frac{4}{3}\pi R^3$

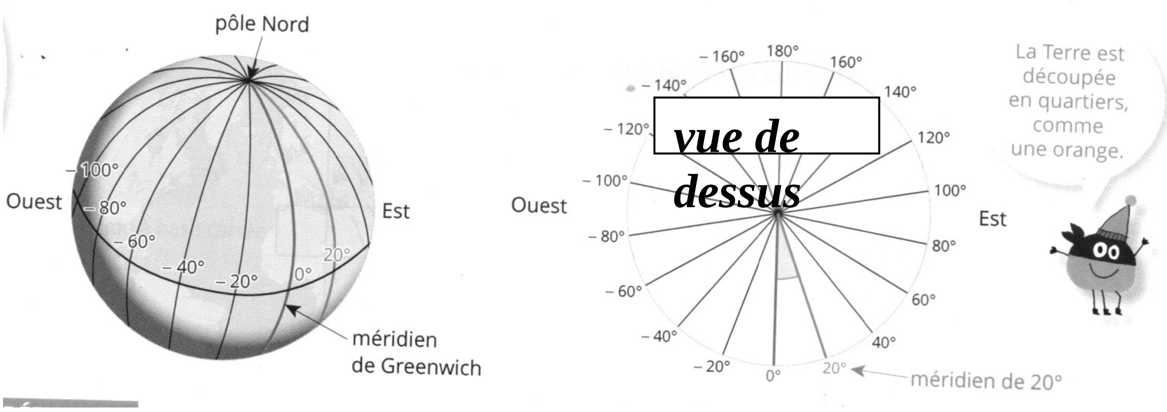
<u>Exemples :</u>

Calculer l'aire d'une sphère de rayon 7 cm (donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au cm²) :	*Calculer le volume d'une boule de rayon 5 cm (donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au mm³) :*
$A_s = 4\pi R^2 = 4\times\pi\times 7^2 = 196\pi$ *(Valeur exacte)* ≈ 616 cm² *(Valeur approchée)* <u>L'aire de la sphère est environ 616 cm².</u>	$V_b = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 5^3 = \frac{500}{3}\times\pi$ *(exacte)* $\approx 523{,}599$ cm³ *(approchée)* <u>Le volume de la boule est environ 523,999 mm³.</u>

PARALLÈLES : LATITUDES



MÉRIDIENS : LONGITUDE



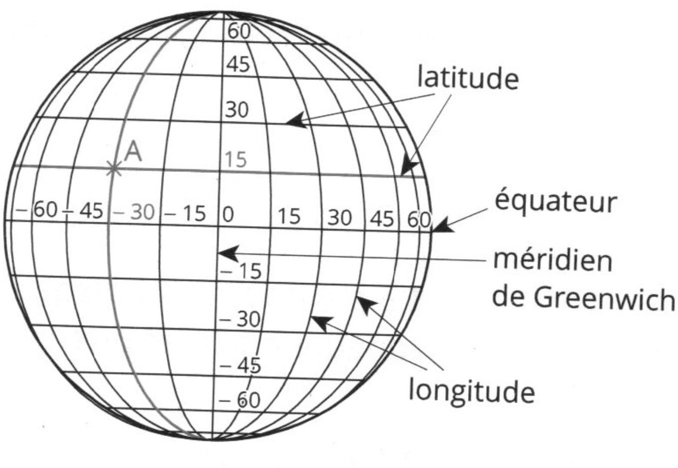
REPÉRAGE :

Les coordonnées géographiques d'un point d'une sphère est le binôme de nombres $(x;y)$ où x est la latitude et y la longitude du point.

Exemple :

Le point A est sur le parallèle de latitude 15° et sur le méridien de longitude – 30°.

Les coordonnés géographiques du point A sont donc (15 ° ; - 30°).



Repérage sur un pavé droit

Définition : On utilise un **repère avec :**

→ Une **origine**

→ Trois axes gradués perpendiculaires entre eux : axe des **abscisses,** axe des **ordonnées et** l'axe des **altitudes.**

Un point M est repéré par un unique triplet de nombres $(x;y;z)$ appelé coordonnées de M. On note M$(x;y;z)$.

abscisse **ordonnée** **altitude**

Exemple :

Le point H est le milieu de [DG].

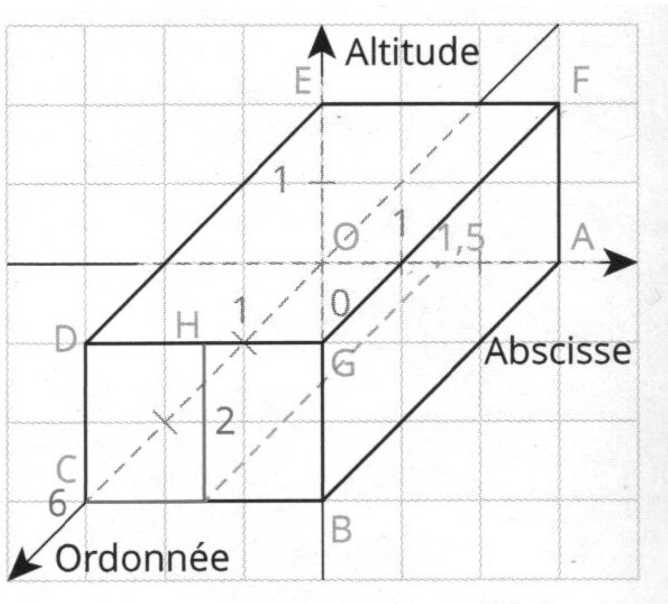
Son abscisse est 1,5 ;

son ordonnée est 6 ;

et son altitude est 2.

Les coordonnées du point H sont donc

(1,5 ; 6 ; 2).



Section d'un solide par un plan

Définition : Lorsqu'un solide est **coupé par un plan**, la surface obtenue s'appelle **la <u>section</u>** du solide par le plan ou **la <u>section plane</u>** du solide.

1) Sections d'un pavé droit, d'un cylindre par un plan

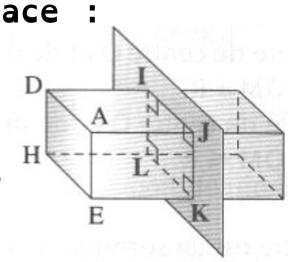
Parallélépipède rectangle (ou pavé droit) :

plan parallèle à une face :

Plan parallèle

à la face DAEH

IJKL est un rectangle

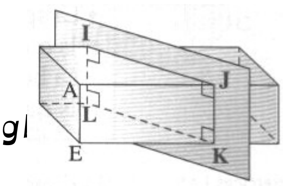


plan parallèle à une arête :

Plan parallèle à

l'arête [AE]

IJKL est un rectangl

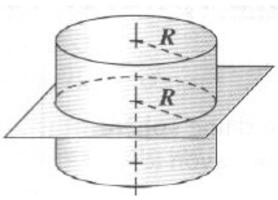


Cylindre de révolution :

Plan parallèle à la base

Plan perpendiculaire à l'a

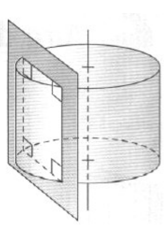
La section est un cercle



Plan parallèle à son axe

Plan parallèle à l'axe

du cylindre



La section est un rectangle

2) Sections d'une pyramide, d'un cône par un plan parallèle à la base

Pyramide à base polygonale :

Plan parallèle à sa base

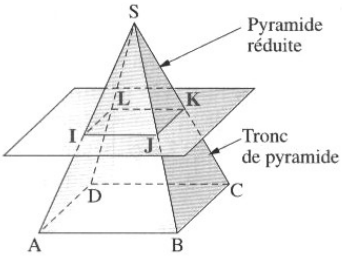
La section

est un polygone

de même nature

que sa base :

c'est **une *réduction* de la base.**



Cône de révolution :

Plan parallèle à sa base

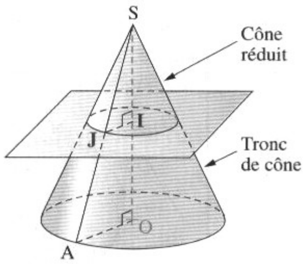
C'est **un cercle,**

c'est une

***réduction* de la**

base.

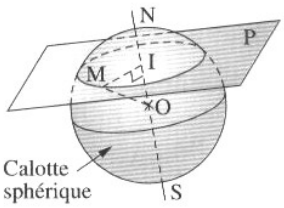
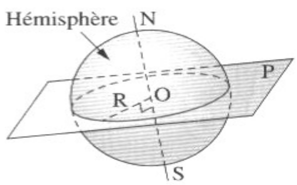
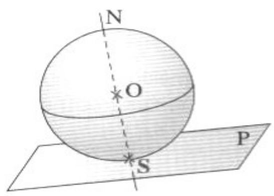
(JI) // (AO)



Le coefficient (ou rapport) de réduction est $\dfrac{petitelongueur}{grandelongueur}$

3) Section d'une sphère par un plan

Soit une sphère de centre O et de rayon R, de diamètre [NS], et un plan P perpendiculaire à (NS). Le plan P coupe la droite (NS) en I.

si 0 < OI < R.	**si OI =** 0	**si OI** = R
		
La section est un cercle de rayon [MI]. Le triangle **MIO est rectangle en I** (OM = R)	La section est un **cercle de rayon R.**	La section est un seul point : le point S. On dit que **le plan P est tangent à la sphère.**

Remarque : Lorsque OI > R, le plan P ne coupe pas la sphère.