La racine carrée

Définition

Si a est un nombre positif, la racine carrée de a, notée a, désigne le seul nombre positif dont le carré est égal à a. Ainsi, par définition, on a donc $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

$\sqrt{0}=0;\ \sqrt{1}=1;\ \sqrt{9}=3;\ \sqrt{16}=4;\ \sqrt{25}=5$

Parmi les nombres connus en classe de troisième, aucun n'a pour carré un nombre négatif. Ainsi écrire « racine carrée de -9 » n'a pas de sens, en effet l'écriture a n'a pas de sens si a est négatif

Résolution d'équations

$x^2 = a$

L'équation $x^2 = a$ où x est l'inconnue possède 0,1 ou 2 solutions suivant le signe de a.

- Si $a < 0$: pas de solutions
- Si $a = 0$: 0 est l'unique solution de l'équation
- Si $a > 0$: $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$ sont les deux uniques solutions de l'équation

$x^2 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5}$ ou $x = -\sqrt{5}$; $x^2 = -4$ N'a pas de solutions réelles.

Opérations

Produit

Pour tous les nombres a et b positifs, $\sqrt{a}\times\sqrt{b} = \sqrt{a\times b}$ c'est-à-dire, le produit de deux racines carrées est égal à la racine carrée du produit.

$A = \sqrt{3}\times\sqrt{12} = \sqrt{3\times 12} = \sqrt{36} = 6$

Somme

ATTENTION : en général, si a et b sont des nombres positifs, $\sqrt{a}+\sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ c'est-à-dire, la somme de deux racines carrées n'est, en général, pas égale à la racine carrée de la somme.

$\sqrt{16}+\sqrt{9} = 4+3 = 7$ Alors que $\sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Donc on constate que $\sqrt{16}+\sqrt{9} \neq \sqrt{16+9}$

Quotient

Pour tous les nombres a et b positifs, avec b non nul, $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ c'est-à-dire, le quotient de deux racines carrées est égal à la racine carrée du quotient.

$D = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{27}} = \sqrt{\frac{21}{27}} = \sqrt{\frac{3\times 7}{3\times 9}} = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

Racine carrée d'un carré

Pour tout nombre a positif, $\sqrt{a^2} = a$

$B = \sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$ et $C = \sqrt{1,44} = \sqrt{1,2^2} = 1,2$

Simplifications d'écritures

Tout comme on préfère écrire une fraction sous forme irréductible, on préfère écrire une racine sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers.

Pour tous les nombres a et b positifs, $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b}$

$\sqrt{50} + 6\sqrt{2} = \sqrt{25\times 2} + 6\sqrt{2} = 5\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 11\sqrt{2}$