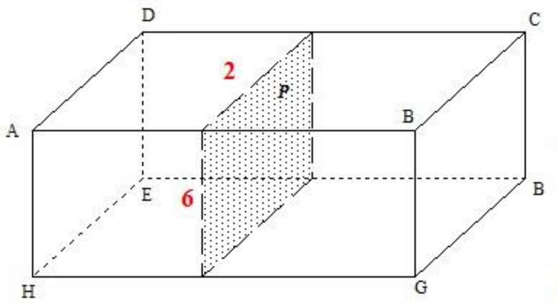
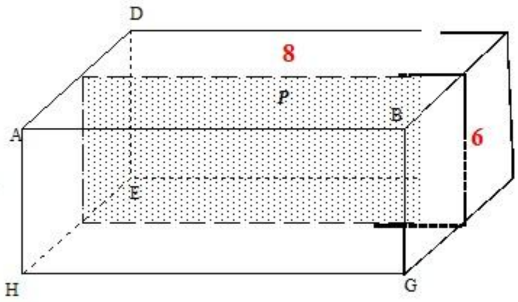
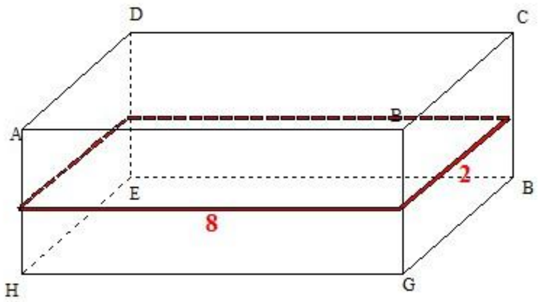
Exercices: La géométrie dans l’espace







Exercice 1:

Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions (l'unité est le cm) :

AB = 8 ; AD = 2 ; AH = 6.

Dans chaque cas, indiquer la nature et calculer l'aire de la section du pavé par le plan P.

1) P est un plan parallèle à la face ADEH.

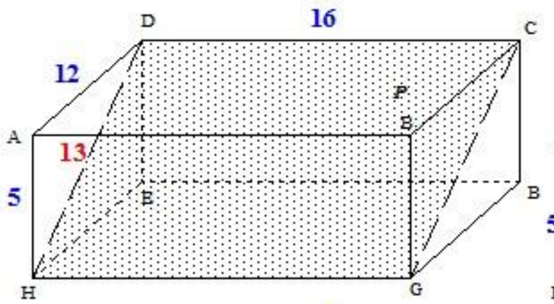
La section obtenue est un rectangle. $A = 2 \times 6 = 12$ cm^2

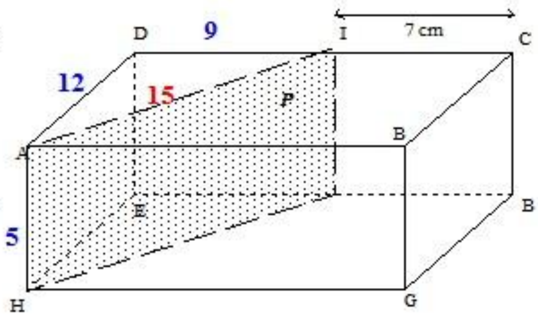
2) P est un plan parallèle à la face ABGH.

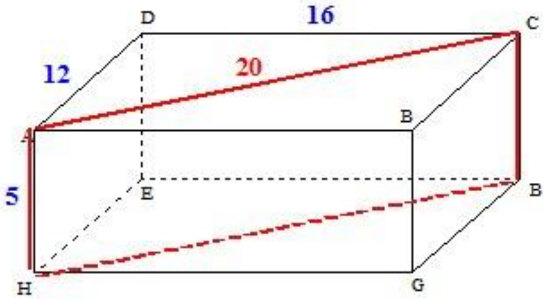
La section obtenue est un rectangle. $A = 8 \times 6 = 48$ cm^2

3) P est un plan parallèle à ABCD.

La section obtenue est un rectangle. $A = 2 \times 8 = 16$ cm^2







Exercice 2:

Un pavé droit ABCDEFGH a pour dimensions (l'unité est le cm) :

AB = 16 ; AD = 12 ; AH = 5.

Dans chaque cas, indiquer la nature et calculer l'aire de la section du pavé par le plan P.

1) P est un plan parallèle à (AB) et passant par D et C.

La section obtenue est un rectangle.

<u>Calcul de DH :</u> Dans le triangle ADH rectangle en A, d’après le théorème de Pythagore, on a :

$DH^2 = AD^2 + AH^2 \rightarrow DH^2 = 12^2 + 5^2$

$DH^2 = 144 + 25 \rightarrow DH^2 = 169$

DH = 13 cm

<u>Calcul de l’aire de la section :</u>

$A = DH \times DC = 13 \times 16 = 208$ cm^2

2) P est un plan parallèle à (BG) et passant par A et I.

La section obtenue est un rectangle.

<u>Calcul de AI :</u> Dans le triangle ADI rectangle en D, d’après le théorème de Pythagore, on a :

$AI^2 = AD^2 + DI^2 \rightarrow AI^2 = 12^2 + 9^2$

$AI^2 = 144 + 81 \rightarrow AI^2 = 225$

AI = 15 cm

<u>Calcul de l’aire de la section :</u>

$A = AI \times AH = 15 \times 5 = 75$ cm^2

3) P est un plan parallèle à (BG) et passant par A et C.

La section obtenue est un rectangle.

<u>Calcul de AC :</u> Dans le triangle ADC rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore, on a :

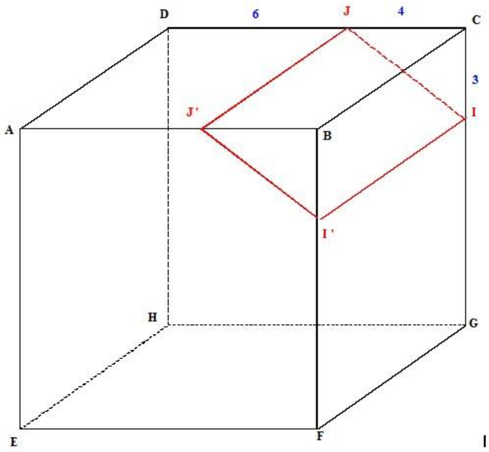
$AC^2 = AD^2 + DC^2 \rightarrow AC^2 = 12^2 + 16^2$

$AC^2 = 144 + 256 \rightarrow AC^2 = 400$

AC = 20 cm

<u>Calcul de l'aire de la section :</u>

$\mathcal{A} = AC \times AH = 20 \times 5 = 100$ cm²



<u>Exercice 3</u>:

On considère un cube d'arête 10 cm tel que celui dessiné ci-dessous:

1) Marquer le point I de [CG] tel que CI = 3 cm et le point J de [DC] tel que DJ = 6 cm. Calculer IJ.

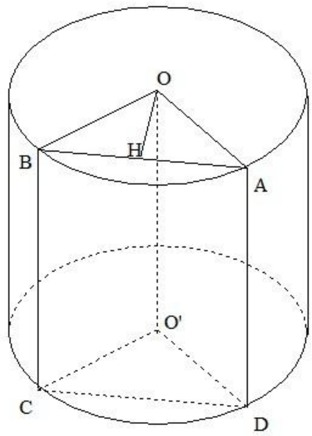
La section obtenue est un rectangle.

<u>Calcul de JI :</u> Dans le triangle ACI rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a : $IJ^2 = JC^2 + CI^2 \rightarrow IJ^2 = 4^2 + 3^2$

$IJ^2 = 16 + 9 \rightarrow IJ^2 = 25 \rightarrow JI = 5$ cm

2) Représenter la section du cube par le plan parallèle à (BC) passant par I et J. Calculer l'aire de la section.

<u>Calcul de l'aire de la section :</u> A = J'J × IJ = 10 × 5 = 50 cm²



<u>Exercice 4:</u>

Un cylindre a pour bases des disques de centres O et O', de rayon 5 cm. La hauteur du cylindre est de 6 cm.

Un plan parallèle à (OO') coupe le cylindre selon le rectangle ABCD. H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OAB et OH = 3 cm.

1) Quelle est la nature du triangle OAB ?

Les points A et B appartiennent au cercle de centre O. Donc, OA et OB sont deux rayons de ce cercle et OA = OB. OAB est un triangle isocèle en O.

2) Calculer BH.

OBH est un triangle rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a :

Dans le triangle ACI rectangle en C, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$OB^2 = BH^2 + HO^2 \rightarrow 5^2 = BH^2 + 3^2$

$25 = BH^2 + 9 \rightarrow BH^2 = 25 - 9$

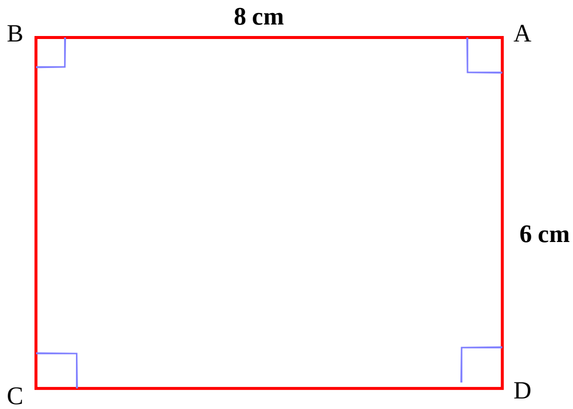
$BH^2 = 16 \rightarrow BH = 4$ cm

3) Calculer l'aire de la section.

Dans un cylindre, la section par un plan parallèle à l'axe est un rectangle. Donc ABCD est un rectangle.

A = AB × BC = (2 × 4)× 6 = 48. L'aire de la section est 48 cm²

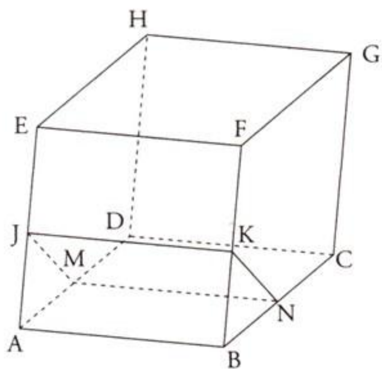
4) Dessiner la section en vraie grandeur.



<u>Exercice 5</u> :

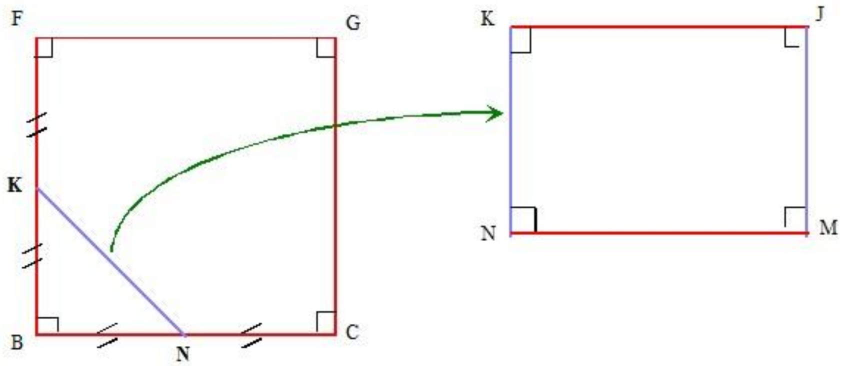
ABCDEFGH est un cube. Les points J, K, M et N sont les milieux respectifs des segments [AE], [FB], [AD] et [BC]. JKNM est une section du cube par un plan parallèle à l'arête [AB].

1) Donner, sans justifier, la nature de la section JKNM. **La section obtenue est un rectangle.**
2) La face FGCB a été dessinée en vraie grandeur, ci-dessous. Placer les points K et N sur cette face. A côté, dessiner la section JKNM en vraie grandeur.



3) Quelle est la nature du solide AJMBKN ?

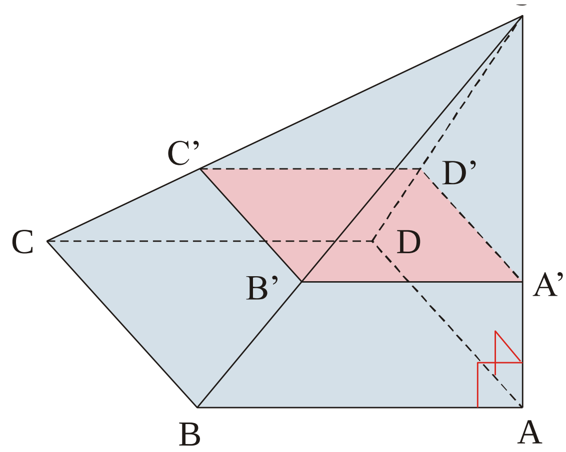
Le solide a deux faces triangulaires qui sont superposables et parallèles et trois faces rectangulaires : le solide AJMBKN est un prisme droit dont la base et un triangle.



Exercice 6 :

SABCD est une pyramide à base rectangulaire. On place sur sa hauteur [SA] un point A' tel que SA' = 6 cm. En coupant SABCD par un plan passant par A' et parallèle à sa base, on obtient la pyramide SA'B'C'D'.

On a : SA = 9 cm, AB = 8 cm et BC = 6 cm.



1) Calculer A'B'.

Sachant que la section de la pyramide est parallèle à la base alors les droites (B'A') et (BA) sont parallèles.
De plus les droites (AA') et (BB') sont sécantes en S.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{SB'}{SB}=\frac{SA'}{SA}=\frac{B'A'}{BA}$

D'où $\frac{6}{9}=\frac{A'B'}{8}$ **soit** $A'B'=\frac{8\times6}{9}=\frac{48}{9}=\frac{16}{3}$ **cm**

2) Calculer l'aire A_1 de ABCD. **A_1 = AB × BC = 8 × 6 = 48 A_1 = 48 cm²**

3) Calculer l'aire A_2 de A'B'C'D'.

<u>Calcul de A'D'</u> : Les droites (D'A') et (DA) sont parallèles et les droites (AA') et (DD') sont sécantes en S.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{SD'}{SD}=\frac{SA'}{SA}=\frac{D'A'}{DA}$

D'où $\frac{6}{9}=\frac{A'D'}{6}$ **soit** $A'D'=\frac{6\times6}{9}=\frac{36}{9}=4$ **cm**

<u>Calcul de l'aire A_2 de A'B'C'D'</u> : A_2 = A'B' × B'C' = $\frac{16}{3}\times4=\frac{64}{3}$ **A_2 =** $\frac{64}{3}$ **cm²**

4) Calculer le volume V_1 de SABCD.

Le volume d'une pyramide est définie par $\frac{1}{3}\times$ aire de la base $\times$ hauteur

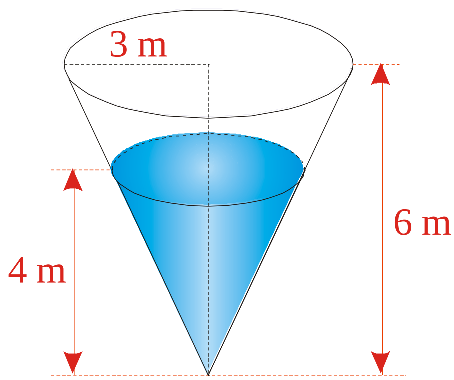
V_1 = $\frac{1}{3}\times A_1 \times SA=\frac{1}{3}\times48\times9=144$ **. Le volume V_1 de SABCD est 144 cm³**

5) Calculer le volume V_2 de SA'B'C'D'.

V_2 = $\frac{1}{3}\times A_2 \times SA'=\frac{1}{3}\times\frac{64}{3}\times6=\frac{64\times3\times2}{3\times3}=\frac{128}{3}$ **. Le volume V_2 de SA'B'C'D' est** $\frac{128}{3}$ **cm³**

Exercice 7 :

Un bassin a la forme d'un cône de hauteur 6 m et dont la base est un disque de rayon 3 m. On remplit ce bassin sur une hauteur de 4 m.



1) Calculer le volume exact V_1 du bassin.

Le volume d'un cône est définie par $\frac{1}{3}\times$ aire de la base $\times$ hauteur

On a : V_1 = $\frac{1}{3}\times\pi\times OA^2\times SO=\frac{1}{3}\times\pi\times3^2\times6=18\pi$ **m³**

2) Quelle est la nature du volume occupé par l'eau ?

On sait que : La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à la base est un disque qui est une réduction du disque de base. Le volume occupé par l'eau est un cône de révolution de rayon O'A' et de hauteur SO'.

3) Calculer le volume d'eau V_2 contenu dans le bassin.

<u>Calcul du rayon O'A'</u> : Sachant que la section du cône est parallèle à la base alors les droites (O'A') et (OA) sont parallèles. De plus les droites (O'O) et (A'A) sont sécantes en S.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\dfrac{SO'}{SO} = \dfrac{SA'}{SA} = \dfrac{O'A'}{OA}$ **D'où** $\dfrac{4}{6} = \dfrac{O'A'}{3}$ **soit** $O'A' = \dfrac{3\times 4}{6} = \dfrac{12}{6} = 2$ **m**

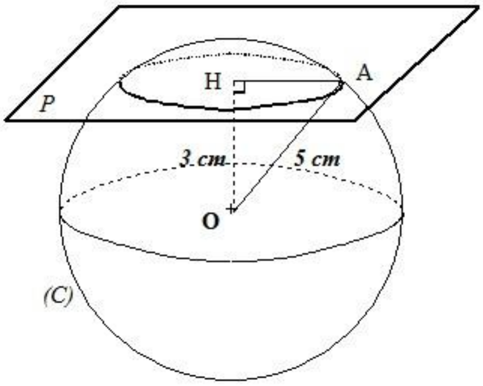
Le volume d'un cône est définie par $\dfrac{1}{3}\times$ aire de la base $\times$ hauteur

On a : $V_2 = \dfrac{1}{3}\times\pi\times O'A'^2\times SO' = \dfrac{1}{3}\times\pi\times 2^2\times 4 = \dfrac{16}{3}\pi$ **m³**

4) Calculer le volume d'eau V_3 qu'il faut ajouter pour remplir le bassin, arrondi au m³ près.

$V_3 = V_1 - V_2 = 18\pi - \dfrac{16}{3}\pi = \dfrac{54\pi - 16\pi}{3} = \dfrac{38}{3}\pi$ **. Le volume d'eau qu'il faut ajouter est de** $\dfrac{38}{3}\pi$ **.**

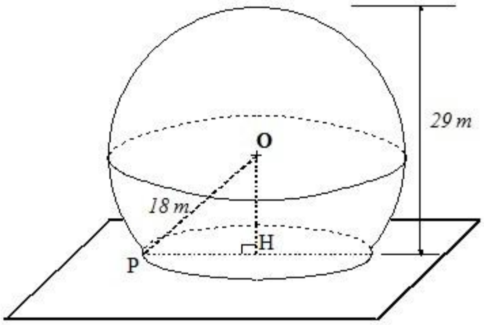
<u>Exercice 8</u> :



On considère une sphère de centre O et de rayon 5 cm.
Cette sphère est coupée par un plan passant à 3 cm de son centre. La section de cette sphère par ce plan est un cercle (*C*) de centre H. Calculer le rayon de cette section.

La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon HA.
OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a :
$OA^2 = OH^2 + HA^2 \rightarrow 5^2 = 3^2 + HA^2$
$HA^2 = 25 - 9 \rightarrow HA = \sqrt{16} = 4$. Le rayon de la section mesure 4 cm.

<u>Exercice 9</u> :



Ce dessin représente la Géode qui est une salle de cinéma installée à la Cité des Sciences au parc de la Villette à Paris. La Géode a la forme d'une calotte sphérique reposant sur la sol. La sphère initiale dont est issue cette calotte a un rayon de 18 mètres. La distance entre le sol et le point le plus haut est de 29 m.

1) Calculer OH. **On a : OH = 29 – OP = 29 – 18 = 11. OH mesure 11 m**
2) Calculer PH.

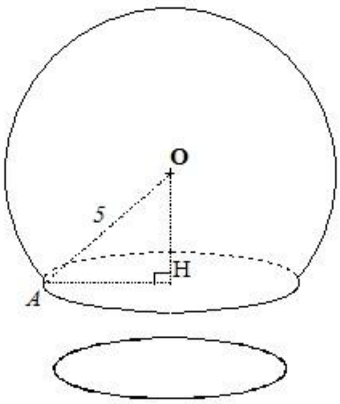
La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon PA. OHP est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a : $OP^2 = OH^2 + HP^2 \rightarrow PH^2 = OP^2 - HO^2$

$PH^2 = 18^2 - 11^2 \rightarrow PH = \sqrt{203} \approx 14{,}25$. Le rayon de la section mesure environ 14,25 m.

3) Calculer le périmètre et l'aire de la surface au sol occupée par la Géode.

Soit P le périmètre, on a : $P = 2\pi PH \approx 2\times\pi\times 14{,}25 \approx 89{,}54$. Le périmètre mesure environ 89,54 m.
Soit A l'aire, on a : $A = \pi PH^2 \approx \pi\times 14{,}25^2 \approx 638$.. L'aire mesure environ 638 m²

<u>Exercice 10</u> :

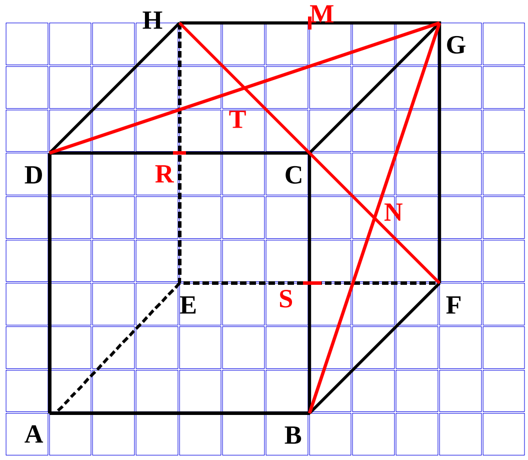


On considère une sphère de rayon 5 cm. On a détaché de cette sphère une calotte sphérique. La hauteur de cette calotte sphérique est 1 cm.

1) Calculer OH. **On a : OH = 5 – 1 = 4. OH mesure 4 cm**
2) Calculer le rayon [AH] du petit cercle.

La section obtenue est un cercle de centre H et de rayon HA. OHA est rectangle en H, donc d'après le théorème de Pythagore on a : $OA^2 = OH^2 + HA^2$

$AH^2 = OA^2 - HO^2 \rightarrow AH^2 = 5^2 - 4^2 \rightarrow AH = \sqrt{9} = 3$. Le rayon de la section mesure 3 cm



Exercice 11 :

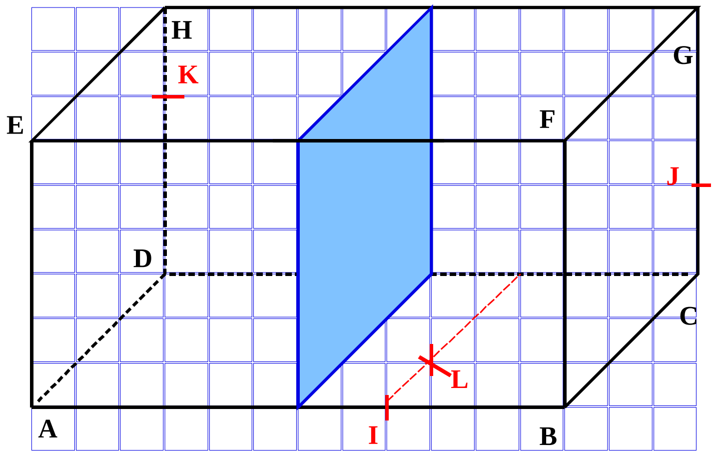
On a représenté ci-contre le cube ABCDEFGH.

1) On se place dans le repère (A ; B, E, D).

Ecrire les coordonnées des points A, B, C, D, E, F, G, H.

A (0 ; 0 ; 0) B (1 ; 0 ; 0) C (1 ; 0 ; 1) D (0 ; 0 ; 1)
E (0 ; 1 ; 0) F (1 ; 1 ; 0) G (1 ; 1 ; 1) H (1 ; 1 ; 1)

2) Quelle est l'ordonnée des points situés : sur la face ABCD ? **ordonnée 0**. Sur la face EFGH ? **ordonnée 1**
3) Placer le point M milieu de l'arête [HG]. Placer le point N intersection des diagonales de la face CGFB.
4) Ecrire les coordonnées des points M et N :
   M (0,5 ; 1 ; 1) N (1 ; 0,5 ; 0,5)
5) Placer sur la figure les points R (0 ; 1 ; 0,5) , S (1 ; 0 ; 0,5) , T (0,5 ; 0,5 ; 1)
6) On se place dans le repère (E ; A, F, H). Indiquer les coordonnées des points A, G, B, M et N dans ce nouveau repère. A (1 ; 0 ; 0) G (0 ; 1 ; 1) B (1 ; 1 ; 0) M (0 ; 0,5 ; 1) N (0,5 ; 1 ; 0,5)



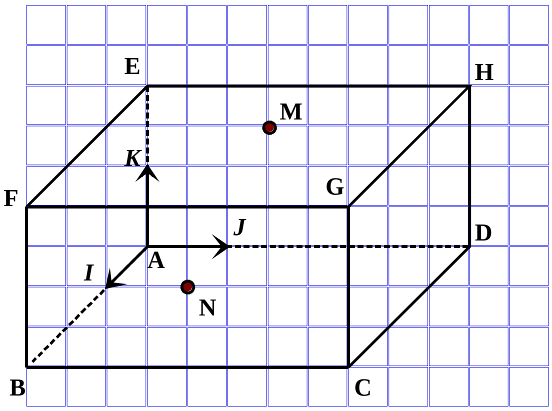
Exercice 12 :

On a représenté ci-contre le parallélépipède rectangle ABCDEFGH. On se place dans le repère (A ; B, D, E)

1) Placer le point I de coordonnées ($\frac{2}{3}$; 0 ; 0).
2) Lire les coordonnées de points J, K, L .

J (1 ; 1 ; $\frac{1}{3}$) K (0 ; 1 ; $\frac{2}{3}$) L ($\frac{2}{3}$; $\frac{1}{3}$; 0)

3) Colorier l'ensemble des points d'abscisse 0,5 à l'intérieur du parallélépipède rectangle.



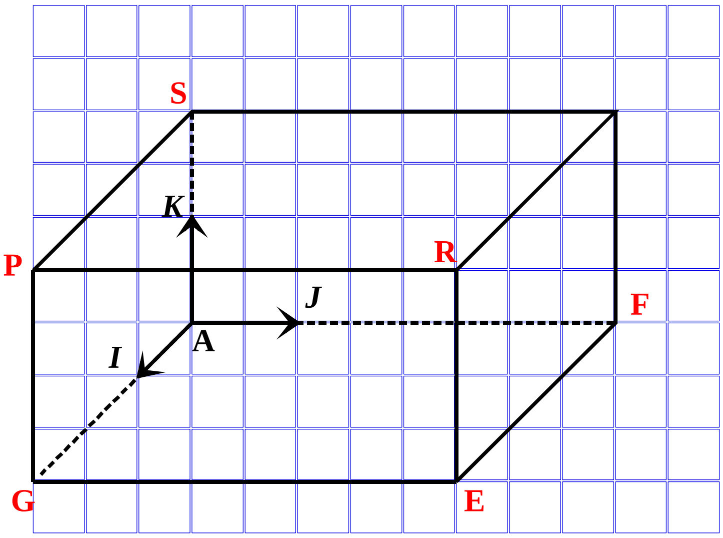
Exercice 13 :

L'origine est le sommet A, les axes sont portés par les demi-droites [AI), [AJ) et [AK).

1) Déterminer les coordonnées des points A, I, J, K, B, D, E, H, C, G et F.

A (0 ; 0 ; 0) I (1 ; 0 ; 0) J (0 ; 1 ; 0) K (0 ; 0 ; 1)
B (3 ; 0 ; 0) D (0 ; 4 ; 0) E (0 ; 0 ; 2) H (0 ; 4 ; 2)
C (3 ; 4 ; 0) G (3 ; 4 ; 2) F (3 ; 0 ; 2)

2) Le point M appartient à la face EFGH. Quelles ont les coordonnées de M ? M (1 ; 2 ; 2)
3) Le point N appartient à la face BCGF. Quelles ont les coordonnées de N ? N (3 ; 2 ; 1)



Exercice 14 :

L'origine est le sommet A, les axes sont portés par les demi-droites [AI), [AJ) et [AK).

Placer les points suivants : R (3 ; 4 ; 2) ; P (3 ; 0 ; 2) ; S (0 ; 0 ; 2) ; E (3 ; 4 ; 0) ; F (0 ; 4 ; 0) ; G (3 ; 0 ; 0)

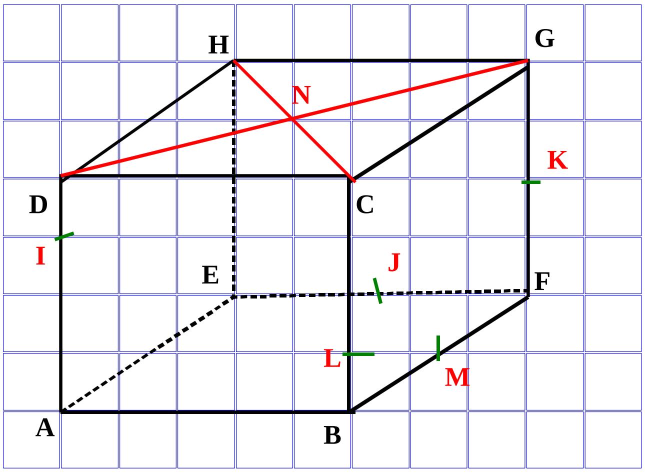
Exercice 15 : On a représenté ci-dessous le parallélépipède rectangle ABCDEFGH.
On se place dans le repère (A ; B, E, D)

1) Placer les points I, J, K et L de coordonnées :

I (0 ; 0 ; $\frac{3}{4}$) , J (0,5 ; 1 ; 0) , K (1 ; 1 ; 0,5) , L (1 ;0 ; $\frac{1}{4}$)

2) Placer le point M milieu de [BF] et le point N, point d'intersection des diagonales de la face CDHG.
3) Lire ensuite les coordonnées des points M et N :

M (1 ; 0,5 ; 0) **N (0,5 ; 0,5 ; 1)**



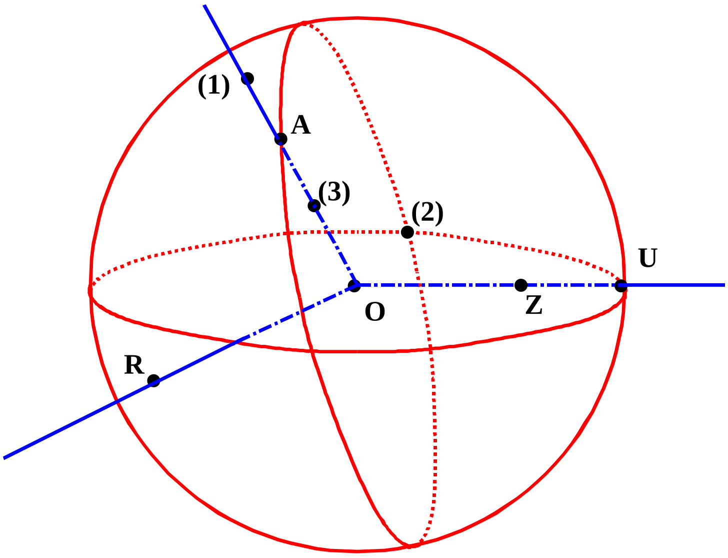
Exercice 16 : « Définition de la sphère et de la boule »

1) Préciser si les points A, Z, U et R de la figure appartiennent à la sphère ou à la boule.

- à la sphère: A et U / - à la boule: A , U , et Z.

2) Les points ①, ② et ③ de la figure se nomment en réalité M, N et P mais on ne sait pas dans quel ordre. On sait seulement que M appartient à la boule, que N n'appartient pas à la boule et que P appartient à la boule sans appartenir à la sphère.

Compléter: ① est le point **N** , ② est le point **M** , ③ est le point **P**.



Exercice 17 : Calculer le rayon d'une sphère de circonférence 43,96 cm

Soit P la circonférence, on a : $P = 2\pi r$ **avec P = 43,96 cm . D'où :** $r = \frac{P}{2\pi} = \frac{43,96}{2\pi} \approx 7$ **. Le rayon de la sphère est environ 7 cm**

Exercice 18 :

On considère une sphère de rayon R. On désigne par C_1 sa circonférence.

1) Exprimer C_1 en fonction de R et de π. **$C_1 = 2\pi R$**
2) On considère une sphère de rayon double du précédent. On désigne par C_2 sa circonférence. Exprimer C_2 en fonction de R. **$C_2 = 2\pi(2 \times R) = 4\pi R$**

Exercice 19 : Calculer le volume d'une bille d'acier de diamètre 6 cm.

On a : $\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{6}{2}\right)^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 3^3 = \frac{4}{3}\times\pi\times 27 = 36\pi \approx 113,09$. **La bille d'acier a un volume de 113 cm³.**

Exercice 20 :

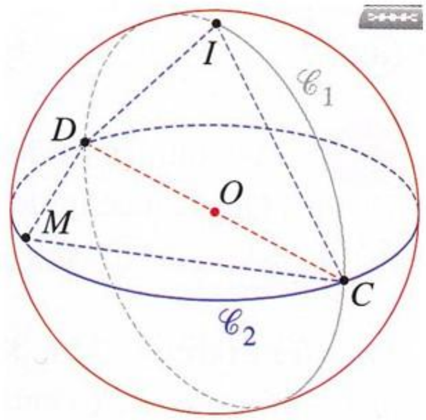
Une quille en bois est formée d'un cylindre surmonté d'une sphère, qui ont tous deux même diamètre de 8 cm. La hauteur totale est 40 cm. Calculer le volume de la quille.

Soit V le volume de la quille, on a :

$$V = \pi\times\left(\frac{8}{2}\right)^2\times(40-8)+\frac{4}{3}\times\pi\times\left(\frac{8}{2}\right)^3 = \pi\times 4^2\times 32+\frac{4}{3}\times\pi\times 4^3 = 512\pi+\frac{256}{3}\pi \approx 1608,5+268,1 \approx 1876,6$$

La quille a un volume de 1 877 cm³ environ.

Exercice 21 :



Le point O est le centre d'une sphère de rayon 5 cm.
Les grands cercles $C1$ et $C2$ sont sécants aux points D et C.
Les points I et M sont situés respectivement sur les cercles $C1$ et $C2$. On donne $\widehat{ODI} = 45°$ et $\widehat{DCM} = 30°$.

1) Que représente les segment [DC] pour les cercles $C1$ et $C2$, et pour la sphère ? **Un diamètre**
2) Donner les longueurs CD, OI et OM. **CD = 10 cm ; OI = OM = 5 cm**
3) Quelle est la nature des triangles CDM et CDI ? **Triangles rectangles**
4) Calculer les longueurs CI et MD.

• Dans le triangle CDI rectangle en I, on a : $\sin\widehat{CDI} = \dfrac{IC}{DC}$ **. Soit** $IC = DC \times \sin\widehat{CDI} = 10 \times \sin 45° \approx 7$ **.**

D'où : IC ≈ 7 cm.

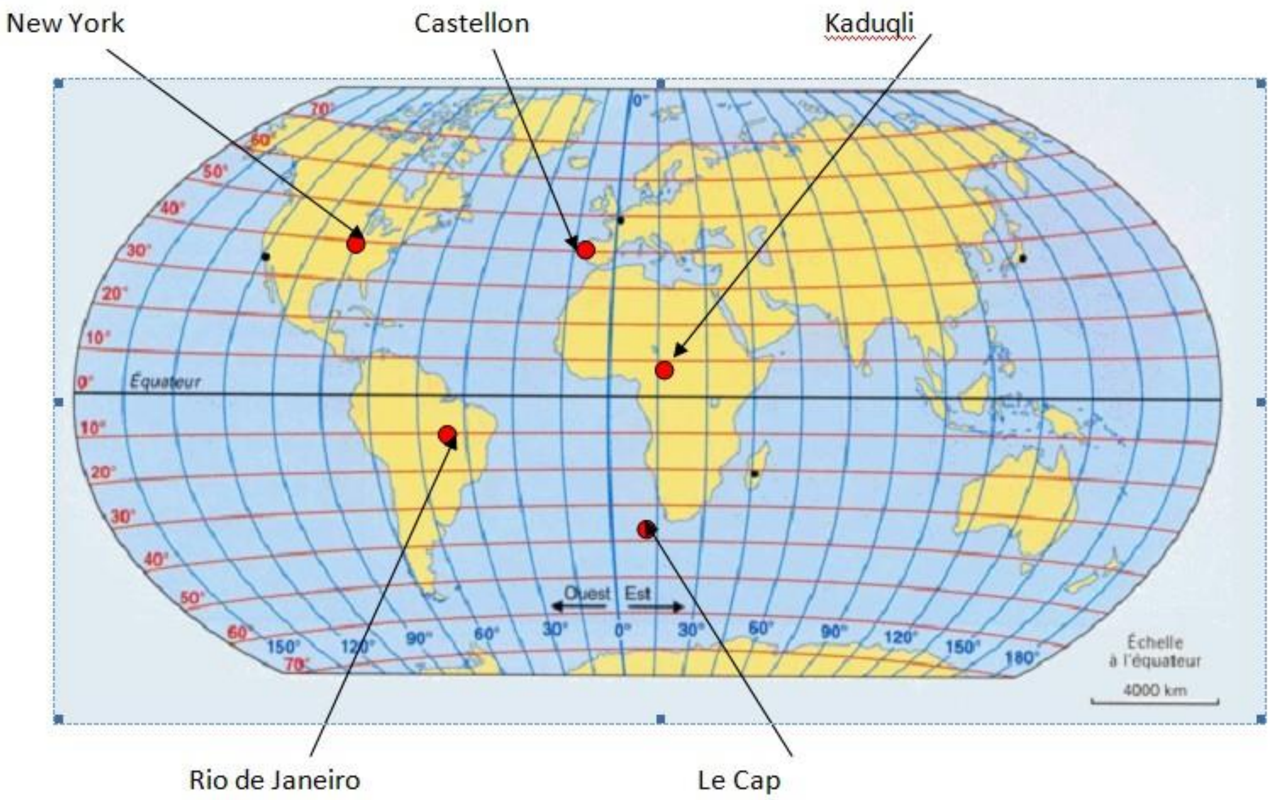
• Dans le triangle CDM rectangle en M, on a : $\sin\widehat{DCM} = \dfrac{DM}{DC}$ **. Soit** $DM = DC \times \sin\widehat{DCM} = 10 \times \sin 30° = 5$

D'où : DM = 5 cm.

Exercice 22 : Observer la carte ci-dessous et réponds aux questions.

1) Sur quel méridien se trouve New York ? Compléter : **Le méridien 70° Ouest. Sa longitude est 70° O**
2) Sur quel parallèle se trouve New York ? Compléter : **Le parallèle 40° Nord. Sa latitude est 40° N**
3) Les coordonnées géographiques de New York sont ? **(70° O ; 40° N)**
4) Indiquer les coordonnées géographiques des villes suivantes : Rio de Janeiro, Castellon, Le Cap et Kaduqli.

Rio de Janeiro : (40° O ; 10° S) **Castellon : (0° ; 40° N)**
Le Cap : (20° E ; 38° S) **Kaduqli : (30° E ; 10° N)**



Exercice 23 :

Un avion qui se trouvait au point de coordonnées (10° O ; 25° N) se déplace de 30° parallèlement à l'équateur, dans le même sens que le sens de rotation de la Terre.
Quelles sont les nouvelles coordonnées ?

La terre tourne de l'Ouest vers L'Est. Les nouvelles coordonnées de l'avion sont donc (20° E ; 25 °N)